Brevet Togo juin 1979

Algèbre

f et g sont les deux applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ déterminées par :

$$f(x) = (-x+1)^2$$
$$g(x) = 4x^2$$

1. Calculer $f(0)$; $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$; $g(-1)$; $g(1+\sqrt{2})$.

2. h étant l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ déterminée par

$$h(x) = (-x+1)^2 - 4x^2$$

   a. Écrire $h(x)$ sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $h(x) = 0$.

3. k est la fonction rationnelle de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ déterminée par :

$$k(x) = \frac{h(x)}{(2x-2)(-3x+1)}$$

   a. Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de k ?

   b. Simplifier $k(x)$ dans cet ensemble $\mathscr{D}$.

   c. Résoudre dans $\mathscr{D}$ l'équation $k(x) = 1$.

Géométrie

Soit $\mathscr{P}$ le plan euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. On considère les points A, B, C, D de coordonnées respectives

$$(1~;~5); \qquad (1~;~8); \qquad (5~;~8); \qquad (5~;~5).$$

Placer ces points dans le plan $\mathscr{P}$ muni du repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$
et démontrer que le quadruplet $(A,~B,~C,~D)$ est un rectangle.

2. On considère l'application $\mathscr{S}$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M de coordonnées $(x~;~y)$ associe le point M' de coordonnées $(x',~y')$ telles que : $\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = y \end{cases}$

   a. Déterminer les coordonnées de A$'$, B$'$, C$'$, D$'$ images par $\mathscr{S}$ des points A, B, C, D.

   b. Placer A$'$, B$'$, C$'$ et D$'$ sur le dessin.

3. Calculer AD et A$'$D$'$ (AD représente la distance de A à D).
Peut-on en conclure que $\mathscr{S}$ est une isométrie ? Pourquoi ?

4. **a.** Démontrer que le quadruplet (A$'$, B$'$, C$'$, D$'$) est un parallélogramme.

   b. Est-ce un losange ?

   c. Démontrer que le triangle (A$'$, C, D) est un triangle rectangle.