Brevet des collèges Toulouse juin 1951

ALGÈBRE

On considère le triangle ABC dont les côtés ont pour longueurs

$$BC = 3 \text{ cm}, \quad CA = 6 \text{ cm}, \quad AB = 5 \text{ cm}.$$

Soit E un point variable du côté [AC].
La parallèle menée à (AB) par E coupe (BC) en D et la parallèle à (BC) menée par E coupe AB en F.
On pose AE = x.

1. Construire le triangle ABC.
   Calculer en fonction de x les longueurs AF, DE et BD.
2. Déterminer x de façon que AE = BF.
   Si E a la position ainsi déterminée, que représente A dans le triangle ABC ?
   En déduire une construction géométrique du point E.
3. Quand E décrit le segment [AC], représenter graphiquement, sur un même graphique, les variations de fonctions y = AE, y = BD, y =BF.
   Déterminer, à l'aide de ce graphique, comment il faut choisir x pour que :
   a. BF > AE ;
   b. BD < BF < AE ;
   c. DF < BD.

GÉOMÉTRIE

On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R.
Sur la tangente à ce cercle $\mathscr{C}$ en un point T, on prend un point P tel que TP = $2R$.
On mène de P une sécante coupant le cercle $\mathscr{C}$ donné en A et B (A est entre P et B).

1. Calculer en fonction de R la longueur OP et le produit PA × PB.
2. On suppose que la sécante (PAB est telle que le point A soit au milieu du segment [PB].
   Calculer dans ce cas les longueurs PA et PB et la distance OH de O à la sécante (PAB).
   Montrer que le triangle OAB est rectangle.
3. Déduire du 2. une construction à la règle et au compas des deux sécantes (PAB) telles que A soit le milieu de [PB].
   Montrer que l'une d'elles passe par le point diamétralement opposé à T sur le cercle $\mathscr{C}$.