Brevet des collèges Toulouse juin 1952

ALGÈBRE

1. Développer et ordonner les expressions suivantes :

$$A = (x-2)^2 + 4\,; \qquad B = (x+2)^2 + 4.$$

   Effectuer le produit des polynômes A et B.

2. Simplifier l'expression

$$\frac{1}{(x-2)^2+4} + \frac{1}{(x+2)^2+4} - \frac{2x^2}{x^2+64}.$$

3. Considérant A et B dans leur forme initiale, montrer que, quelle que soit la valeur numérique donnée à x, A et B ne prennent jamais la valeur zéro.

   Trouver le même résultat en considérant l'expression du produit $A \times B$.

   Les équations suivantes :

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + 4 &= 0,\\ (x+2)^2 + 4 &= 0\end{aligned}$$

   ont-elles des racines ?

GÉOMÉTRIE

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon R.
On trace une demi-droite fixe Ox, sur laquelle on marque les points A et B tels que OA $= R$, OB $= 2R$.
On considère enfin un diamètre *variable* [CD] du cercle $\mathcal{C}$.
Les droites (AC) et (BD) se coupent en M et la parallèle à (CD) menée par M coupe Ox en I.

1. Comparer les triangles BIM et BOD, puis les triangles AIM et AOC. En déduire les égalités

$$\frac{\text{AI}}{\text{AO}} = \frac{\text{BI}}{\text{BO}} = \frac{\text{IM}}{R}.$$

2. Calculer en fonction de R la longueur des segments [AI], [IB], [OI] et [IM].
3. Montrer que le point M décrit, lorsque le diamètre [CD] varie, un cercle fixe, que l'on déterminera.

   Montrer que le point M$'$ commun aux droites (DA) et (BC) décrit le même cercle que M.

   Préciser la position des points M et M$'$ sur le cercle.