

Brevet des collèges Toulouse juin 1975

Algèbre

On considère les fonctions polynômes f et g de \mathbf{R} dans \mathbf{R} définies par :

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-1)^2(2x-1)(x-2) \\ g(x) &= (3x-1)^2-4(x-1)^2. \end{aligned}$$

1. Développer, réduire et ordonner $f(x)$.
2.
 - a. Mettre $f(x)$ et $g(x)$ sous forme de produits de facteurs du premier degré.
 - b. Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(-1)$.
3. Résoudre dans \mathbf{R} l'équation $f(x) = g(x)$.
4. Soit h la fonction rationnelle de \mathbf{R} dans \mathbf{R} définie par :

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- a. Déterminer son ensemble de définition \mathcal{D} .
- b. Démontrer que pour tout x élément de \mathcal{D}

$$h(x) = \frac{2x-1}{5x+1}.$$

- c. Calculer $h(\sqrt{3})$.

Donner le résultat sous forme d'un quotient ayant un dénominateur entier.

5. Soit un plan P muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(On pourra prendre pour unité 3 cm).

Dans ce repère, A et B sont les représentations graphiques respectives de fonctions a et b de \mathbf{R} dans \mathbf{R} définies par

$$a(x) = 2x - 1, \quad b(x) = 5x - 3.$$

- a. Déterminer les coordonnées du point M tel que $A \cap B = \{M\}$.
- b. Construire A et B .

Géométrie

Soit un plan P muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Placer les points

$$A(-1; 4), \quad B(2; 1), \quad C(-4; -5), \quad D(-2; 1), \quad E(0; 1).$$

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{AD} .
2. Démontrer que les points A, D, C sont alignés.
3.
 - a. Démontrer que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{BC} sont orthogonaux.
 - b. En déduire la nature du triangle (A, B, C).
4. Soit F le point défini par $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
 - a. Calculer les coordonnées de F. (On trouve (0 ; -1)).
Démontrer que les points B, C, F sont alignés.
Placer le point F.
 - b. Déterminer l'écart angulaire de l'angle géométrique \widehat{EBF}
 - en degrés
 - en grades
 - en radians
 - c. Démontrer que le triangle (B, F, D) est rectangle isocèle.
5. Soit H la projection orthogonale du point B sur la droite (AC).
Démontrer que les points D, E, B, H appartiennent à un cercle dont on précisera le centre.