Brevet Toulouse juin 1976

Algèbre

On donne les applications polynômes f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 2x^3+3x^2-9(2x+3),\\ g(x) & = & (2x+3)^2(2x-3)^2-9(2x+3)^2 \end{array}$$

1. Exprimer $f(x)$ sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.
2. Calculer $f(3)$ et $f(-3)$; f est-elle une bijection (justifier la réponse) ?
3. Exprimer $g(x)$ sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(4x)f(x) = g(x)$.
5. Soit q la fonction rationnelle de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie

$$q(x) = \frac{(4x)f(x)}{g(x)}.$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition, $\mathscr{D}$, de q.

   b. Montrer que, pour tout x de $\mathscr{D}$,

$$q(x) = \frac{x+3}{2x+3}.$$

6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $q(x) = 1\cdot$
7. **a.** Sachant que $1,4 < /sqrt2 < 1,5$, quel est le signe du réel $\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}$?

   b. Calculer $q\left(\left|\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\right|\right)$ en exprimant le résultat sous la forme d'un quotient dont le dénominateur est un nombre entier.

N. B. - On peut écrire indifféremment $(4x)f(x)$, ou $4xf(x)$.

Géométrie

Dans un plan euclidien (Q) rapporté à un repère. orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on donne les points

$$\mathrm{A}(4\,;0),\quad \mathrm{B}(0\,;4),\quad \mathrm{D}(-4\ ;\ 0),\quad \mathrm{H}(2\,;0)\quad \text{et}\quad \mathrm{M}\left(2\ ;\ 2\sqrt{3}\right).$$

Partie A

1. Calculer les distances de O respectivement à A, B, D et M et en déduire que ces quatre points sont sur un cercle $(\mathscr{C})$ dont on précisera un diamètre.
2. Placer les points A, B, D, H et M.
3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DM}}$ sont orthogonaux.
4. Montrer que le triangle (O, M, A) est équilatéral
5. Calculer la distance de D à M.

Partie B

On considère dans (Q) la symétrie orthogonale S par rapport A la droite (MH).

1. Quelle est l'image de O par S ?
2. On désigne par P l'image de D par S. Placer P.
3. Montrer que le triangle (D, M, A) et (P, M, O) sont isométriques.
4. En déduire que les distances de P à M et de P à O sont respectivement $4\sqrt{3}$ et 8, et que la droite (MP) est tangente en M au cercle $(\mathscr{C})$.
5. déterminer l'image du cercle $(\mathscr{C})$ par S.
6. L'unité étant le degré, soit u l'écart angulaire de l'angle géométrique $\widehat{\text{HPM}}$.
   Déterminer u (on pourra calculer sinus eu