∽ Brevet Toulouse juin 1977 ∾

Algèbre

On donne l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (3x-4)(x-1) - 3(1-x)^2 + x^2(4x-4).$$

1. Développer, réduire et ordonner $f(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.

2. Ecrire $f(x)$ sous forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.

3. Calculer $f\left(\sqrt{3}\right)$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

5. On considère la fonction rationnelle F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \frac{4x^3 - 4x^2 - x + 1}{(5-x)\left(4x^2-1\right)}.$$

a. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de F.
Montrer que, pour tout x de $\mathcal{D}$, $F(x) = \dfrac{x-1}{5-x}$ (rendre rationnel le dénominateur du résultat)

b. Calculer $F(3)$; $F(1)$; $F\left(\sqrt{5}\right)$ du résultat).

c. Construire, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les représentations graphiques (D_1) et (D_2) des applications g_1 et g_2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$g_1(x) = x - 1; \qquad g_2(x) = 5 - x.$$

Résoudre graphiquement l'équation $F(x) = 1$.

Géométrie

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, placer les points A B, C donnés par leurs coordonnées :

$$\text{A}(3\,;\,-1), \qquad \text{B}\,(2\,;\,3), \qquad \text{C}(-2\,;\,2)$$

1. a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{BC}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$.

b. Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{BC}}$, $\overrightarrow{\text{AC}}$.

c. Démontrer que le triangle (A, B, C) est isocèle et rectangle.

d. Soit H la projection orthogonale de B sur (AC).
Calculer les distances CH , HA et BH.

e. y désigne l'écart angulaire exprimé en degrés de l'angle géométrique $\widehat{\text{BCA}}$.
Calculer $\sin y$.

2. a. Construire A′ symétrique de A par rapport à B et C′ symétrique de C par rapport à B.

b. Calculer les coordonnées de A′ et C′.

c. Démontrer que le quadruplet (C, A, C$'$, A$'$) est un carré.

3. Soit (T) la parallèle à (BA) passant par C.
Soit (F) le cercle de centre B passant par A.
Démontrer que $(F) \cap (T) = \{\text{C}\}$.

N. B. - L'usage des tables n'est pas indispensable.