∽ Brevet Toulouse juin 1985 ∾

Algèbre

Exercice 1

Soit l'application P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x élément de $\mathbb{R}$,

$$P(x) = (2x-6)(1-x) + x^2 - 9.$$

1. Mettre $P(x)$ sous la forme d'un produit de deux facteurs.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 2

Soit les applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x élément de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x \\ g(x) &= -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   a. $f(x) = 0$,
   $g(x) = 0$,
   $f(x) = g(x)$
   b. $f(x) = -4g(x)$.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.
3. Dans un même repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ construire les droites D_1 et D_2 représentant respectivement les applications f et g.
4. D_1 coupe l'axe $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath}\right)$ en O et D_2 coupe ce même axe en B.
   a. Quelles sont les coordonnées des points O et B.
   b. Quelles sont les coordonnées du point G intersection de D_1 et D_2.
5. Montrer que cette construction graphique permet de contrôler les résultats des questions 1. a. et 2.
6. Démontrer que les droites D_1 et D_2 sont perpendiculaires.

Géométrie

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ on considère les points

$$\text{A}(2\ ;\ -5)\ ; \qquad \text{B}(0 ; 3)\ ; \qquad \text{C}(-3\ ;\ 0).$$

1. Placer ces points.
   Démontrer que le triangle ACB est rectangle.

2. Calculer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$.
   Quelle est la nature du quadrilatère ADBC.
   Calculer les coordonnées du point d'intersection I des diagonales de ce quadrilatère.
3. Soit le cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon BC.
   Calculer le rayon de ce cercle.
4. Démontrer que la droite (CA) est tangente au cercle $\mathscr{C}$.
5. Quelle est la nature du triangle OCB ? Soit a la mesure de l'angle $\widehat{CBO}$. Déterminer $\sin a$.
6. Ce cercle coupe l'axe des ordonnées $\left(O ; \overrightarrow{\jmath}\right)$ en deux points M et M$'$ (M désigne le point d'ordonnée positive, M$'$ celui d'ordonnée négative).
   Calculer les coordonnées des points M et M$'$.