

œ Brevet Toulouse septembre 1977 œ

Algèbre

On considère les applications f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par :

$$\begin{aligned}f(x) &= 4(2x-3)^2 - (x+2)^2 \\g(x) &= (5x-4)(x+3) - (4-5x)(x+2) + 25x^2 - 16.\end{aligned}$$

1. Développer, réduire et ordonner $f(x)$ suivant les puissances décroissantes de x .
2. Calculer $f(-1)$; $f(1 + \sqrt{2})$.
3. Mettre $f(x)$ et $g(x)$ sous forme de produits de facteurs du premier degré.
4. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = g(x)$.
5. On considère la fonction rationnelle h de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- a. Quel est son ensemble de définition?
- b. Montrer que, sur cet ensemble, $h(x) = \frac{3x-8}{7x+9}$.
- c. Calculer le réel $h\left(\frac{1}{3}\right)$.
- d. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $h(x) = -\frac{2}{3}$.

Géométrie

Dans un plan P muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , placer les points A, B, C définis par :

$$\vec{OA} = 2\vec{i} - \vec{j}, \quad \vec{OB} = -\vec{i} - 2\vec{j}, \quad \vec{OC} = 5\vec{j}.$$

1.
 - a. Calculer les distances AB, AC, BC.
 - b. Démontrer que le triangle (A, B, C) est rectangle.
2. Soit D, l'image de A dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite (BC).
 - a. Préciser la construction du point D.
 - b. On désigne par J le point d'intersection des droites (AD) et (BC).
Démontrer que les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle.
 - c. Soit I le centre de ce cercle. Calculer les coordonnées de I.
3. Calculer les coordonnées du point E sachant que (A, B, E, C) est un rectangle.
4. Démontrer que les droites (IJ) et (DE) sont parallèles.
5. Trouver une équation de la droite (DE).
6. L'unité étant le degré, on désigne par u l'écart angulaire de l'angle géométrique \widehat{ABC} .
Calculer $\tan u$.