∽ Baccalauréat de technicien hôtellerie Métropole ∾ septembre 2006

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

EXERCICE 1 **9 points**

Un restaurateur veut acheter des tables et des chaises pour son restaurant.
Il veut au moins 15 tables et 70 chaises.
Un fournisseur A lui propose un lot de 1 table et 6 chaises pour 75 €.
Un fournisseur B lui propose un lot de 1 table et 4 chaises pour 60 €.
On désigne par x le nombre de lots A et y le nombre de lots B achetés par le restaurateur.

1. On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O ; I, J) (unité : 1 cm).
   (On ne prendra que les abscisses et les ordonnées positives).
   Sur l'annexe 1, tracer les droites D_1 et D_2 d'équations respectives $y = -x + 15$ et $y = -1,5x + 17,5$.
2. Soit le système (S) : $\left\{\begin{array}{lcl} x + y & \geqslant & 15 \\ 3x + 2y & \geqslant & 35 \\ x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \end{array}\right.$
   Vérifier que les contraintes sur x et y pour qu'il y ait suffisamment de tables et de chaises se traduisent par le système (S) avec x et y entiers.
3. Dans le repère de l'annexe 1, déterminer l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient le système (S) en hachurant la partie du plan qui ne convient pas.
4. On note C le coût de x lots A et y lots B.
   a. Exprimer C en fonction de x et de y.
   b. Montrer que $y = -\frac{5}{4}x + 19$ est une équation de la droite D correspondant à un coût C de 1 140 €.
   c. Tracer D dans le repère de l'annexe 1.
   d. Déterminer le nombre de lots A et le nombre de lots B à acheter pour que le coût soit minimum.
   Quel est ce coût minimum ?

EXERCICE 2 **11 points**

Les parties A et B sont indépendantes.
Tous les résultats seront arrondis à l'unité près.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 45] par

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 15x^2.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O ; I, J).
On prendra, sur une feuille de papier millimétré, comme unités graphiques 1 cm pour 5 unités sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 500 unités sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = x(-x+30)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,45]$.
3. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
$f(x)$							4 500			

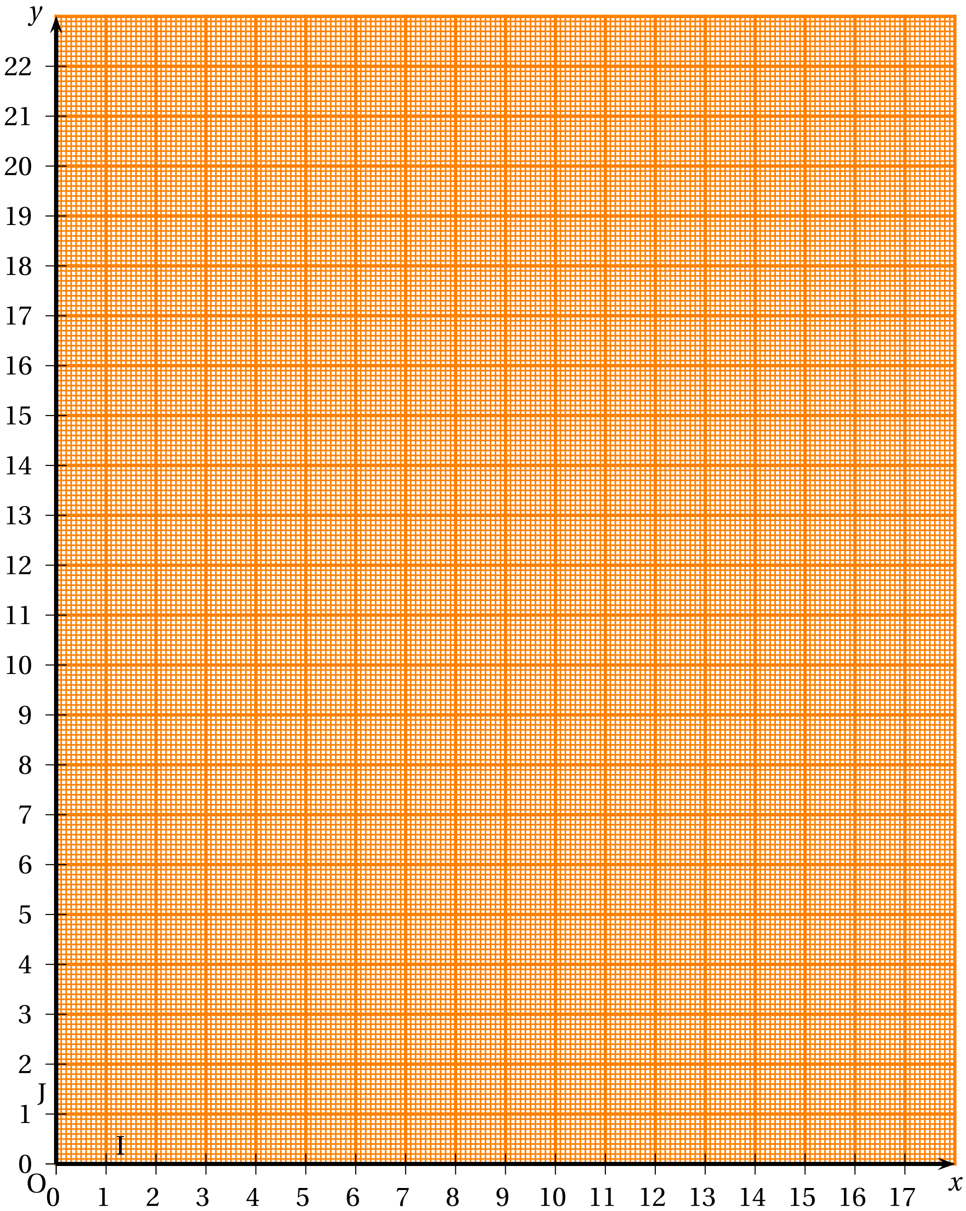
4. Calculer $f'(0)$. Que peut-on en déduire pour la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente T.

Partie B

Un producteur de cuisines équipées produit et vend chaque mois x cuisines équipées d'un certain modèle.
On admet que le bénéfice mensuel en euros est donné par $B(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 15x^2$.

1. Utiliser la partie A afin de déterminer pour quelle valeur de x le bénéfice est maximum.
   Quel est le bénéfice maximum ?
2. Déterminer graphiquement les quantités de cuisines équipées produites et vendues correspondant à un bénéfice d'à peu près 3 500 €.
3. Déterminer dans quel intervalle doit être choisi x pour que le bénéfice soit supérieur à 3 500 €.

ANNEXE 1


y
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
J
I
O
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
x