

☞ Baccalauréat Buenos Aires novembre 1960 ☞

Série mathématiques

I. EXERCICE 1

Résoudre et discuter le système

$$\begin{cases} (m-1)x + 2y = m+5 \\ x + (m-1)y = m-1 \end{cases}$$

suivant les diverses valeurs du paramètre m .

I. EXERCICE 2

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction irréductible soit égale à une fraction décimale.

Application : existe-t-il une fraction décimale :

a. égale à $\frac{455}{130}$

b. égale à $\frac{264}{312}$?

I. EXERCICE 3

Équation de l'ellipse rapportée à ses axes de symétrie.

II. Problème

On désigne par (E) une ellipse de centre O et de foyers F et F' .

A et A' sont les sommets de l'axe focal, B et B' ceux de l'axe non focal; (D) et (D') sont les directrices associées respectivement aux foyers F et F' , H et H' leurs pieds sur l'axe focal.

On pose

$$OA = OA' = a, \quad OF = OF' = c, \quad OB = OB' = b$$

et l'on désigne par e l'excentricité de l'ellipse.

Partie A

1. Calculer, en fonction de b seulement, la valeur du produit

$$\overline{FA} \cdot \overline{FA'}.$$

2. Calculer, en fonction de e seulement, les valeurs des rapports $\frac{\overline{FO}}{\overline{FA'}}$, $\frac{\overline{FA}}{\overline{FA'}}$, $\frac{\overline{FH}}{\overline{FA'}}$, $\frac{\overline{FH'}}{\overline{FA'}}$ et le cosinus de l'angle \widehat{BFO} .

Partie B

On considère, dans cette deuxième partie, les ellipses (E) qui ont un foyer F fixe et dont les sommets A' décrivent un cercle (Γ) passant par F .

Dans le cas où le petit axe conserve une longueur constante $2b$ on demande de trouver :

1. le lieu géométrique du sommet A ;
2. les enveloppes des tangentes à l'ellipse aux sommets A' , A , B et B' ;
3. l'enveloppe de l'axe non focal de l'ellipse (E).

À cet effet, on cherchera à déduire, à l'aide d'une transformation simple, cette enveloppe de celle de la tangente au sommet A de l'ellipse (E).

Partie C

On considère, dans cette troisième partie, les ellipses (E) qui ont un foyer F fixe, dont les sommets A' décrivent un cercle (C) fixe, de centre I , de rayon R , et ne passant pas par F .

Dans le cas où l'excentricité e des ellipses (E) reste constante et égale à $\frac{1}{2}$ on demande de trouver :

1. les lieux géométriques du centre O de l'ellipse, du sommet A , des pieds H et H' des directrices associées aux foyers F et F' ;
2. les lieux géométriques des sommets B et B' ;
3. les enveloppes des tangentes à l'ellipse (E) aux sommets A , A' , ainsi que les enveloppes de l'axe non focal et des deux directrices.