

**CAPES externe – Épreuve 1 – 2008**  
**Fonctions à variations bornées**

## Introduction

Dans ce problème, on s'intéresse aux fonctions à variations bornées. Cette notion a été introduite en 1881 par Jordan<sup>1</sup> pour étendre un théorème de Dirichlet<sup>2</sup> sur la convergence des séries de Fourier<sup>3</sup>. Il est composé de sept parties A, B, C, D, E, F et G.

Dans la partie A on établit quelques propriétés élémentaires relatives aux fonctions à variations bornées. En introduction de la partie B, on définit une notion de longueur bornée et de longueur pour les fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Son objectif est d'établir des propriétés générales sur cette notion : une inégalité triangulaire, une relation de Chasles... Dans la partie C on établit l'équivalence entre « être de longueur bornée sur tout segment » et « être à variations bornées ». La partie D se consacre au cas des fonctions de classe  $C^1$ . On y démontre qu'elles sont toujours de longueur bornée et on donne une formule pour calculer leur longueur. La partie E s'intéresse au cas des fonctions périodiques. La partie F est consacrée à l'étude d'un exemple. Dans la partie G, on étend les définitions et les propriétés présentées précédemment aux cas des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Sauf mentions contraires explicitées dans le texte, les parties de ce sujet ne sont pas a priori indépendantes.

## Notations et définition

- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^n)$  désigne l'ensemble des fonctions de  $A$  vers  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout  $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^n)$  et  $B \subseteq A$ ,  $f|_B$  désigne la restriction de  $f$  à  $B$ .
- Dans tout le problème,  $I$  désignera un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.
- Pour  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ , on dit que  $f$  est à **variations bornées** lorsqu'il existe  $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  croissante et  $h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  décroissante telles que  $f = g + h$ .

## A. Premières propriétés

**A1.** Établir que toute fonction monotone définie sur  $I$  est à variations bornées.

**A2a.** Montrer que l'ensemble des fonctions à variations bornées définies sur  $I$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .

**A2b.** Établir que ce sous-espace est engendré par l'ensemble des fonctions croissantes sur  $I$ .

---

1. Camille Marie Ennenmond Jordan, mathématicien français, Lyon 1838 – Paris 1922.  
2. Gustav Peter Dirichlet, mathématicien allemand, Düren 1805 – Göttingen 1859.  
3. Joseph Jean-Baptiste Fourier, mathématicien français, Auxerre 1768 – Paris 1830.

Dans la fin de cette partie, on considère  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  une fonction à variations bornées, et  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$  tels que  $a < b$ .

**A3.** Soit  $\alpha \in I$ . Démontrer qu'il existe  $k \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  croissante et  $l \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  décroissante telles que  $f = k + l$  et  $k(\alpha) = 0$ .

**A4.** On écrit  $f = g + h$  avec  $g$  croissante sur  $I$  et  $h$  décroissante sur  $I$ . Prouver que :

$$g(b) - g(a) \geq f(b) - f(a) \geq h(b) - h(a).$$

**A5.** Montrer que  $f$  est bornée sur le segment  $[a, b]$ .

**A6.** Établir qu'en tout point intérieur à  $I$ , la fonction  $f$  admet une limite à droite et une limite à gauche.

## B. Fonctions de longueur bornée

Soient  $a$  et  $b$  dans  $I$  avec  $a < b$  et  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ . On rappelle qu'une **subdivision**  $\sigma$  de  $[a, b]$  est une suite finie, strictement croissante, qu'on peut noter  $(\sigma_k)_{0 \leq k \leq p}$  où  $p \in \mathbb{N}^*$ , et vérifiant  $\sigma_0 = a$  et  $\sigma_p = b$ .

Pour  $\sigma = (\sigma_k)_{0 \leq k \leq p}$  une subdivision de  $[a, b]$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$\ell(\sigma, f) = \sum_{i=1}^p |f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})|.$$

On dit que  $f$  est de **longueur bornée** sur le segment  $[a, b]$  lorsqu'il existe  $\Lambda \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $\sigma$  subdivision de  $[a, b]$  on ait  $\ell(\sigma, f) < \Lambda$ . Si  $f$  est de longueur bornée sur  $[a, b]$ , on définit alors  $L_a^b(f)$ , la **longueur** de  $a$  à  $b$  de  $f$ , par :

$$L_a^b(f) = \sup_{\sigma} \{\ell(\sigma, f) \mid \sigma \text{ est une subdivision de } [a, b]\}.$$

De plus, on pose également  $L_b^a(f) = -L_a^b(f)$  et  $L_a^a(f) = 0$ .

Dans cette partie, on considère  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  et  $a, b, c$  trois éléments de  $I$  tels que  $a < c < b$ .

**B1.** On suppose que  $f$  est de longueur bornée sur  $[a, b]$ . Montrer que :

$$L_a^b(f) \geq 0.$$

**B2.** On suppose que  $f$  est de longueur bornée sur  $[a, b]$ . Montrer que :

$$|f(b) - f(a)| \leq L_a^b(f).$$

**B3.** On suppose que  $f$  et  $g$  sont de longueur bornée sur  $[a, b]$ . Établir que  $f + g$  est de longueur bornée sur  $[a, b]$  et que :

$$L_a^b(f + g) \leq L_a^b(f) + L_a^b(g).$$

**B4.** On suppose que  $f$  est de longueur bornée sur  $[a, c]$  et sur  $[c, b]$ . On considère une subdivision  $\sigma = (\sigma_k)_{0 \leq k \leq p}$  de  $[a, b]$  et on pose :

$$q = \max\{j \in \{0, \dots, p\} \mid \sigma_j < c\}, \quad r = \min\{j \in \{1, \dots, p\} \mid \sigma_j > c\}.$$

**B4a.** Justifier l'existence de  $q$  et de  $r$ .

On définit alors les suites finies  $\sigma'$  et  $\sigma''$  par :

$$\sigma'_j = \sigma_j \text{ si } j \in \{0, \dots, q\}, \quad \sigma'_{q+1} = c,$$

$$\sigma''_0 = c, \quad \sigma''_j = \sigma_{j+r-1} \text{ si } j \in \{1, \dots, p-r+1\}.$$

**B4b.** Montrer que  $\sigma'$  est une subdivision de  $[a, c]$  et que  $\sigma''$  est une subdivision de  $[c, b]$ .

**B4c.** Montrer que  $\ell(\sigma, f) \leq \ell(\sigma', f) + \ell(\sigma'', f)$ .

**B4d.** Prouver que  $f$  est de longueur bornée sur  $[a, b]$  et que :

$$L_a^b(f) \leq L_a^c(f) + L_c^b(f).$$

**B5.** On suppose maintenant que  $f$  est de longueur bornée sur  $[a, b]$  et on considère une subdivision quelconque  $\sigma'$  de  $[a, c]$  et une subdivision quelconque  $\sigma''$  de  $[c, b]$ .

**B5a.** Démontrer qu'il existe une subdivision de  $[a, b]$ , notée  $\sigma$ , telle qu'on ait  $\ell(\sigma, f) = \ell(\sigma', f) + \ell(\sigma'', f)$ .

**B5b.** Montrer que  $f$  est de longueur bornée sur  $[a, c]$  et sur  $[c, b]$  et que :

$$L_a^b(f) \geq L_a^c(f) + L_c^b(f).$$

**B6.** On suppose maintenant que  $f$  est de longueur bornée sur tout segment de  $I$ . Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  dans  $I$ , établir l'égalité :

$$L_\alpha^\beta(f) + L_\beta^\gamma(f) = L_\alpha^\gamma(f).$$

## C. Lien entre « être de longueur bornée » et « être à variations bornées »

On considère  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .

**C1.** Soient  $a$  et  $b$  dans  $I$  avec  $a < b$ .

**C1a.** Soit  $q \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  une fonction monotone. Prouver que  $q$  est de longueur bornée sur  $[a, b]$  et qu'on a :

$$L_a^b(q) = |q(b) - q(a)|.$$

**C1b.** On suppose que  $f$  est une fonction à variations bornées. Montrer que  $f$  est de longueur bornée sur  $[a, b]$ .

**C2.** On suppose que  $f$  est de longueur bornée sur tout segment de  $I$ . On choisit  $\lambda$  dans  $I$  et on définit alors les fonctions  $g$  et  $h$ , pour tout  $t \in I$ , par :

$$g(t) = \frac{1}{2}(f(t) + L_\lambda^t(f)) \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{1}{2}(f(t) - L_\lambda^t(f)).$$

Prouver que  $g$  est croissante sur  $I$  et que  $h$  est décroissante sur  $I$ .

**C3.** En déduire que  $f$  est à variations bornées si et seulement si  $f$  est de longueur bornée sur tout segment de  $I$ .

## D. Cas des fonctions de classe $C^1$

On considère une fonction  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  de classe  $C^1$  sur  $I$ . Le but de cette partie est de montrer que  $f$  est de longueur bornée sur tout segment de  $I$  et que pour tous  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $I$  on a

$$L_\alpha^\beta(f) = \int_\alpha^\beta |f'(t)| dt.$$

**D1.** Soient  $u$  et  $v$  dans  $I$  avec  $u < v$ , établir que  $|f(u) - f(v)| \leq \int_u^v |f'(t)| dt$ .

**D2.** Soient  $a$  et  $b$  dans  $I$  avec  $a < b$ .

**D2a.** Soit  $\sigma$  une subdivision de  $[a; b]$ . Établir que  $\ell(\sigma, f) \leq \int_a^b |f'(t)| dt$ .

**D2b.** Démontrer que  $f$  est de longueur bornée sur  $[a, b]$  et que  $L_a^b(f) \leq \int_a^b |f'(t)| dt$ .

**D3.** Soient  $a$  et  $b$  dans  $I$  avec  $a < b$ , et soit un réel  $\varepsilon > 0$ .

**D3a.** Montrer qu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $\sigma = (\sigma_k)_{0 \leq k \leq p}$  une subdivision de  $[a; b]$ , tels que pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$  et pour tout  $x$  et  $y$  éléments de  $[\sigma_{i-1}, \sigma_i]$  on ait

$$|f'(x) - f'(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

**D3b.** Prouver que pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$  il existe  $c_i \in [\sigma_{i-1}, \sigma_i]$  tel que

$$|f'(c_i)|(\sigma_i - \sigma_{i-1}) = |f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})|.$$

**D3c.** En déduire que pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ , on a

$$|f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})| \geq \int_{\sigma_{i-1}}^{\sigma_i} |f'(t)| dt - \frac{\varepsilon(\sigma_i - \sigma_{i-1})}{b-a}.$$

**D3d.** Établir que

$$\ell(\sigma, f) \geq \int_a^b |f'(t)| dt - \varepsilon.$$

**D4.** Conclure.

**D5.** Établir que  $f$  est à variations bornées.

## E. Cas des fonctions périodiques

Dans cette partie on s'intéresse aux fonctions périodiques à variations bornées. On y utilise certains résultats de la partie A. Par ailleurs, les résultats de cette partie ne sont pas utilisés dans les autres parties.

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $[x]$  la partie entière de  $x$ . On rappelle que  $[x]$  est l'unique élément de  $\mathbb{Z}$  vérifiant  $[x] \leq x < [x] + 1$ . On rappelle également que la fonction partie entière est croissante. On considère  $T \in \mathbb{R}_+^*$  et on définit la fonction  $p$  sur  $\mathbb{R}$  par  $p(x) = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$ .

**E1.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , montrer que  $x - p(x)T \in [0, T[$ .

**E2.** Pour  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \leq b$ , établir que :

$$p(a) = p(b) \quad \text{ou} \quad p(a) + 1 \leq p(b).$$

**E3.** Soit  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  une fonction périodique de période  $T$ . On suppose que  $f|_{[0, T]}$  est à variations bornées. On peut donc écrire  $f|_{[0, T]} = k + l$  avec  $k \in \mathcal{F}([0, T], \mathbb{R})$  croissante,  $l \in \mathcal{F}([0, T], \mathbb{R})$  décroissante et  $k(0) = 0$  (d'après A3). Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$g(x) = p(x)k(T) + k(x - p(x)T), \quad h(x) = f(x) - g(x).$$

**E3a.** Justifier que les fonctions  $g$  et  $h$  sont bien définies sur  $\mathbb{R}$ .

**E3b.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \leq b$ . Montrer que  $g(a) \leq g(b)$ .

**E3c.** Montrer que pour tout réel  $x$  on a :  $h(x) = -p(x)k(T) + l(x - p(x)T)$ .

**E3d.** Montrer que pour tout  $u \in [0, T]$  on a  $l(0) \geq l(u) \geq l(0) - k(T)$ .

**E3e.** Prouver finalement que  $f$  est à variations bornées.

**E4.** On considère la fonction

$$\psi : x \mapsto \frac{1}{x - [x] - 1}.$$

**E4a.** Montrer que  $\psi$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$  et est périodique de période 1.

**E4b.** Parmi les trois fonctions  $\psi|_{[0, 1[}$ ,  $\psi|_{[0, 1]}$  et  $\psi$ , quelles sont celles qui sont à variations bornées? On justifiera chacune des réponses.

Dans la fin de cette partie, on considère la fonction  $\varphi$  définie, pour  $x \in \mathbb{R}$ , par :

$$\varphi(x) = |\sin x| + \sin x.$$

**E5.** Donner, sans justification, la représentation graphique de  $\varphi|_{[-2\pi; 2\pi]}$  dans un repère qu'on choisira.

**E6.** Montrer que  $\varphi$  est à variations bornées.

**E7.** D'après A3 et E6, on peut écrire  $\varphi = g + h$  avec  $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  croissante vérifiant  $g(0) = 0$  et  $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  décroissante.

**E7a.** Établir que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(2n\pi) + 2 \leq g\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right).$$

(Indication : On pourra utiliser A4.)

E7b. En déduire que l'on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, g(n\pi) \geq n$ .

E7c. Que vaut  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  ?

E7d. En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ .

## F. Un exemple de fonction dérivable et bornée mais non à variations bornées

Les premières questions de cette partie peuvent se traiter indépendamment des parties précédentes.

On étudie dans cette partie certaines propriétés de la fonction  $f$  définie pour  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

F1a. Étudier la parité de  $f$ .

F1b. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  réel.

F1c. La fonction  $f$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  ?

F1d. Que vaut  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ?

F1e. En déduire que  $f$  est bornée.

F2. Montrer que la série de terme général  $\ln\left(\frac{4n+1}{4n-1}\right)$  ( $n \geq 1$ ) est divergente.

F3. On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par  $u_n = \sqrt{\frac{2}{(2n-1)\pi}}$ .

F3a. Vérifier que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est décroissante et est de limite nulle.

F3b. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Établir que

$$\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t} \left| \cos \frac{1}{t^2} \right| dt \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sqrt{\frac{4}{(4n+1)\pi}}}^{\sqrt{\frac{4}{(4n-1)\pi}}} \frac{1}{t} dt.$$

F3c. Prouver alors que la série de terme général  $\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t} \left| \cos \frac{1}{t^2} \right| dt$  ( $n \geq 1$ ) est divergente.

F3d. En déduire que l'intégrale  $\int_0^{u_1} \frac{1}{t} \left| \cos \frac{1}{t^2} \right| dt$  est divergente.

F4a. Montrer que l'intégrale  $\int_0^1 f'(t) dt$  est convergente mais qu'elle n'est pas absolument convergente.

F4b. Que vaut  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 |f'(t)| dt$  ?

**F5.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $ab \leq 0$ . Prouver que  $f$  n'est pas de longueur bornée sur  $[a; b]$ .

**F6.** Soit  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point. Démontrer que l'application  $f|_J$  est à variations bornées si et seulement si  $0 \notin J$ .

## G. Généralisation au cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Dans cette partie, on considère un entier  $n \geq 2$  et on munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique; la norme euclidienne  $\|\cdot\|$  associée est donc définie, pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , par

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

On peut prolonger la définition introduite au début de la partie B, de fonction de longueur bornée aux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  de la manière suivante :

Étant données  $a$  et  $b$  dans  $I$  avec  $a < b$  et  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ , pour  $\sigma = (\sigma_k)_{0 \leq k \leq p}$  une subdivision de  $[a; b]$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$\ell(\sigma, f) = \sum_{i=1}^p \|f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})\|.$$

On dit que  $f$  est de **longueur bornée** sur le segment  $[a, b]$  lorsqu'il existe  $\Lambda \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $\sigma$  subdivision de  $[a, b]$  on ait  $\ell(\sigma, f) < \Lambda$ . Si  $f$  est de longueur bornée sur  $[a, b]$ , on définit alors  $L_a^b(f)$ , la longueur de  $a$  à  $b$  de  $f$ , par :

$$L_a^b(f) = \sup_{\sigma} \{\ell(\sigma, f) \mid \sigma \text{ est une subdivision de } [a; b]\}.$$

De plus, on pose également  $L_b^a(f) = -L_a^b(f)$  et  $L_a^a(f) = 0$ .

Dans cette partie, on considère deux éléments  $a$  et  $b$  de  $I$  tels que  $a < b$ , et  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ . Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $f_i$  la  $i$ -ième composante de  $f$ . Ainsi, pour tout  $t \in I$ , on a  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$  (on remarquera que  $f_i \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ).

**G1.** Soit  $R$  un automorphisme orthogonal de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que si  $f$  est de longueur bornée sur  $[a, b]$  alors  $R \circ f$  l'est aussi sur  $[a, b]$  et que :

$$L_a^b(R \circ f) = L_a^b(f).$$

**G2.** On suppose que  $f$  est de longueur bornée sur  $[a; b]$ . Montrer que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la fonction  $f_i$  est de longueur bornée sur  $[a; b]$  et que :

$$L_a^b(f_i) \leq L_a^b(f).$$

**G3.** On suppose que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f_i$  est de longueur bornée sur  $[a; b]$ . Démontrer que  $f$  est de longueur bornée sur  $[a; b]$  et que :

$$L_a^b(f) \leq \sum_{i=1}^n L_a^b(f_i).$$

**G4.** Démontrer que  $f$  est de longueur bornée sur tout segment de  $I$  si et seulement si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f_i$  est à variations bornées.

**G5.** On suppose maintenant que  $f$  est de longueur bornée sur tout segment de  $I$ . Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  dans  $I$ . Établir l'égalité :

$$L_\alpha^\beta(f) + L_\beta^\gamma(f) = L_\alpha^\gamma(f).$$

Dans toute la suite, on suppose que  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  et on rappelle que :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = (f'_1(t), \dots, f'_n(t)).$$

**G6.** Prouver que  $f$  est de longueur bornée sur tout segment de  $I$ .

**G7.** Soit  $T$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que  $T \circ f$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  et que  $(T \circ f)' = T \circ f'$ .

**G8.** On définit la fonction  $w$ , pour  $x \in I$ , par  $w(x) = L_a^x(f)$  et on considère  $t \in I$ .

**G8a.** Montrer qu'il existe  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|\vec{u}\| = 1$  et  $f'(t) = \|f'(t)\| \vec{u}$ .

**G8b.** Prouver qu'il existe  $R$  un automorphisme orthogonal de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $R(\vec{u}) = (1, 0, \dots, 0)$ .

On pose alors  $g = R \circ f$  et  $(g_1, \dots, g_n) = g$ .

**G8c.** Montrer que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  et établir que :

$$g'_1(t) = \|f'(t)\| \quad \text{et} \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}, \quad g'_i(t) = 0.$$

**G8d.** Montrer que  $g$  est de longueur bornée sur tout segment de  $I$ .

**G8e.** Soit  $v \in \mathbb{R}^*$  tel que  $t + v \in I$ , prouver que

$$\frac{1}{v} L_t^{t+v}(g_1) \leq \frac{1}{v} L_t^{t+v}(f) \leq \frac{1}{v} \sum_{i=1}^n L_t^{t+v}(g_i).$$

**G8f.** En déduire que  $w$  est dérivable en  $t$  et que  $w'(t) = \|f'(t)\|$ .

**G9.** Établir que :

$$L_a^b(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

**G10.** Soit  $h \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^n)$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $[a, b[$  telle que l'intégrale  $\int_a^b h'(t) dt$  soit absolument convergente. On veut montrer que  $h$  est de longueur bornée sur  $[a, b]$  et exprimer  $L_a^b(h)$ . On considère  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ .

**G10a.** Prouver que  $h|_{[a, b[}$  admet une limite finie en  $b$ . On notera  $H$  cette limite.

**G10b.** Soit  $x \in [a; b]$ . Montrer que :

$$\|h(x) - h(b)\| \leq \|H - h(b)\| + \int_x^b \|h'(t)\| dt.$$

**G10c.** Soit  $\sigma$  une subdivision de  $[a ; b]$ . Établir que :

$$\ell(\sigma, h) \leq \|H - h(b)\| + \int_a^b \|h'(t)\| dt.$$

**G10d.** Montrer qu'il existe  $d \in ]a ; b[$  tel que :

$$\|H - h(b)\| - \frac{\varepsilon}{2} \leq \|h(d) - h(b)\| - \int_d^b \|h'(t)\| dt.$$

**G10e.** Montrer qu'il existe une subdivision  $\sigma'$  de  $[a ; d]$  telle que :

$$\int_a^d \|h'(t)\| dt - \frac{\varepsilon}{2} \leq \ell(\sigma', h).$$

**G10f.** Montrer qu'il existe une subdivision  $\sigma''$  de  $[a ; b]$  telle que :

$$\|H - h(b)\| + \int_a^b \|h'(t)\| dt - \varepsilon \leq \ell(\sigma'', h).$$

**G10g.** Conclure.

**G11.** Soit  $h \in \mathcal{F}([a ; b], \mathbb{R}^n)$  telle que  $h$  soit de classe  $C^1$  sur  $[a, b[$  et que l'intégrale  $\int_a^b h'(t) dt$  ne soit pas absolument convergente. Soit  $A \in \mathbb{R}$ .

**G11a.** Démontrer qu'il existe  $c \in [a ; b[$  tel que  $\int_a^c \|h'(t)\| dt > A + 1$ .

**G11b.** Montrer qu'il existe une subdivision  $\sigma$  de  $[a, b]$  telle que  $\ell(\sigma, h) > A$ .

**G11c.** Prouver que  $h$  n'est pas de longueur bornée sur  $[a, b]$ .

---

FIN DE L'ÉPREUVE

---