

∞ CAPES externe 10 mars 2009 ∞

Seconde épreuve

9 h à 14 h

Notations et présentation du sujet

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul. Si a et b sont deux entiers naturels tels que $a < b$ on note $\llbracket a, b \rrbracket$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leq k \leq b$.

Si $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , pour un polynôme $P(X) \in K[X]$ on notera P la fonction polynôme associée à $P(X)$. On note $P'(X)$ le polynôme dérivé de $P(X)$.

Enfin, le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine O .

Ce sujet traite de quelques aspects géométriques liés aux racines de polynômes. Il se compose de quatre parties. Les parties A et B sont destinées à donner des majorations des modules des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients. Dans les parties suivantes, on s'intéresse à localiser les racines du polynôme dérivé par rapport aux racines du polynôme. Dans la partie C on établit à ce sujet un théorème de Lucas et dans la partie D on démontre un raffinement de ce théorème pour des polynômes de degré 3.

Partie A : une majoration des modules des racines d'un polynôme

Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n . On se propose de montrer que les racines de $P(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R où

$$R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \dots, 1 + |a_{n-1}|\}$$

I. Exemple numérique

On considère les nombres complexes $a_0 = 6 - 2i$, $a_1 = -3 - 5i$, $a_2 = -2 + 3i$, et on définit le polynôme $p(X) \in \mathbb{C}[X]$ par :

$$p(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0.$$

1. Montrer que $p(X)$ possède une racine réelle.
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 + 3iz - 3 + i = 0$.
3. Vérifier que les racines de $p(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R où $R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|\}$.

II. Étude du cas général

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans \mathbb{C} . On pose, pour tout entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$r_i = \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{et} \quad D_i = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r_i\}$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et soit V un vecteur propre de A associé à la

valeur propre λ . On pose $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ où $v_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

- a. Montrer que pour tout entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$|\lambda v_i| \leq r_i \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|v_k|)$$

- b. En déduire que : $\lambda \in \bigcup_{i=1}^n D_i$.

2. Au polynôme $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, est associée la matrice carrée d'ordre n notée M_P , appelée matrice compagnon de P , et définie par :

$$M_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire la matrice $M_P = (m_{ij})$ avec :

$$\begin{cases} m_{ij} = 1 & \text{si } i - j = 1 \\ m_{in} = -a_{i-1} \\ m_{ij} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- a. Montrer que pour tout nombre complexe z on a :

$$\det(M_P - zI_n) = (-1)^n P(z)$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n .

- b. En déduire que les racines de $P(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R où

$$R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \dots, 1 + |a_{n-1}|\}$$

PARTIE B : La borne de Cauchy

Dans cette partie on se propose de donner un autre encadrement des modules des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.

I. Un résultat préliminaire

Soient $(c_i)_{i \in [0, n-1]}$ des réels positifs non tous nuls. On considère le polynôme $H(X)$ défini par :

$$H(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$$

et on définit sur $]0; +\infty[$ la fonction h par :

$$h(x) = -\frac{H(x)}{x^n}$$

1. Montrer que la fonction h est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
2. En déduire que le polynôme $H(X)$ admet une unique racine réelle strictement positive qu'on note α et montrer que cette racine est une racine simple.
3. Soit ζ une racine complexe de $H(X)$. On suppose que $|\zeta| > \alpha$, montrer alors que :

$$|\zeta|^n > \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k$$

4. En déduire que toutes les racines de $H(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon α .

II. Une application

On considère un entier $m \geq 2$ et un polynôme $F(X) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k$ de degré $m-1$ tel que a_i soit un réel strictement positif pour tout $i \in [0, m-1]$.

On pose $\gamma = \max_{i \in [1, m-1]} \left\{ \frac{a_i - 1}{a_i} \right\}$ et on considère une racine complexe ζ du polynôme $F(X)$.

1. En considérant le polynôme $F_\gamma(X) = (X - \gamma)F(X)$, montrer que

$$|\zeta| \leq \gamma$$

2. On pose $\gamma' = \min_{i \in [1, m-1]} \left\{ \frac{a_i - 1}{a_i} \right\}$. Montrer que :

$$\gamma' \leq |\zeta|$$

III. La borne de Cauchy

Soit $f(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n tel que les $(a_i)_{i \in [0, n-1]}$ soient non tous nuls.

1. Montrer que l'équation d'inconnue x

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k = |a_n| x^n$$

possède une unique solution réelle strictement positive.

Cette racine est appelée borne de Cauchy de $f(X)$ et sera notée dans la suite $\rho(f)$.

2. Montrer que pour toute racine complexe ζ de $f(X)$ on a :

$$|\zeta| \leq \rho(f)$$

3. Soit $(\zeta_i)_{i \in [1, n]}$ les n racines complexes (distinctes ou non) de $f(X)$ avec

$$0 \leq |\zeta_1| \leq |\zeta_2| \leq \dots \leq |\zeta_n| \leq \rho(f)$$

- a. Montrer que pour tout entier $k \in [0, n]$ on a :

$$\left| \frac{a_k}{a_n} \right| \leq \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k}$$

où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

- b. En déduire que :

$$\rho(f)^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \rho(f)^k |\zeta_n|^{n-k}$$

- c. En déduire que :

$$\left(\sqrt[n]{2} - 1 \right) \rho(f) \leq |\zeta_n|$$

- d. On suppose que 0 n'est pas racine de $f(X)$ et on pose $g(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^{n-k}$.

On note $\rho(g)$ la borne de Cauchy de $g(X)$. Montrer que :

$$\frac{1}{\rho(g)} \leq |\zeta_1| \leq \frac{1}{\left(\sqrt[n]{2} - 1 \right) \rho(g)}$$

4. En reprenant le polynôme $p(X)$ de la question 1. de la partie A, déterminer à la calculatrice une valeur approchée de la borne de Cauchy de $p(X)$ et vérifier pour ce polynôme les résultats obtenus aux questions 2., et 3. c.

IV. Un raffinement de la borne de Cauchy

On considère toujours $f(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n tel que les $(a_i)_{i \in [0, n-1]}$ soient non tous nuls.

On pose

$$f_1(X) = a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k$$

On se propose de montrer que les racines de $f(X)$ appartiennent à $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$ où \mathcal{D}_0 et \mathcal{D}_1 sont les disques définis par :

$$\mathcal{D}_0 = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq \rho(f_1)\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_1 = \left\{z \in \mathbb{C}, \left|z + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \leq \rho(f_1)\right\}$$

et où $\rho(f_1)$ désigne la borne de Cauchy de $f_1(X)$.

1. Montrer que $\rho(f_1) \leq \rho(f)$.
2. Soit ζ une racine de f n'appartenant pas à \mathcal{D}_0 . Montrer que :

$$|a_{n-1} + a_n \zeta| \leq \frac{1}{\rho(f_1)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |a_k| \rho(f_1)^k = |a_n| \rho(f_1)$$

3. Conclure.

PARTIE C : un théorème de Lucas

On dit qu'une partie Γ du plan \mathcal{P} est convexe si pour tout couple (A, B) de points de Γ , le segment $[AB]$ est contenu dans Γ : c'est à dire, en notant a et b les affixes respectives des points A et B , si pour tout $\lambda \in [0; 1]$, le point M_λ d'affixe $\lambda a + (1-\lambda)b$ appartient à Γ . (En particulier, l'ensemble vide est convexe).

I. Préliminaires

1. Soit P une partie de \mathcal{P} et E l'ensemble des parties de P qui sont convexes et qui contiennent P . On pose

$$\mathcal{E}(P) = \bigcap_{\Gamma \in E} \Gamma$$

Montrer que $\mathcal{E}(P)$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) partie convexe contenant P . Cette partie $\mathcal{E}(P)$ est appelée **l'enveloppe convexe** de P .

2. Soit P une partie non vide de \mathcal{P} et notons \mathcal{B} l'ensemble des barycentres de familles finies de points de P affectés de coefficients positifs. Montrer que $\mathcal{E}(P) = \mathcal{B}$.

II. Soit $f(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n et soit $f'(X)$ son polynôme dérivé.

Soit $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ l'ensemble des racines de $f(X)$ et soit α_j l'ordre de multiplicité de la racine r_j pour tout $j \in [1, m]$.

1. Montrer que pour tout nombre complexe z n'appartenant pas à $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$, on a :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{z - r_j}$$

2. Soit $r \in \mathbb{C}$ une racine de $f'(X)$ n'appartenant pas à $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$. Montrer que :

$$\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} (r - r_j) = 0$$

et déduire que le point d'affixe r est barycentre des points M_1, M_2, \dots, M_m d'affixes respectives r_1, r_2, \dots, r_m .

3. Montrer alors que l'ensemble des points dont les affixes sont les racines de $f'(X)$ est inclus dans l'enveloppe convexe des points du plan dont les affixes sont les racines de $f(X)$. (*Théorème de Lucas*)

4. Illustrer ce résultat pour le polynôme $p(X)$ défini dans la question 1. de la partie A.

PARTIE D : théorème de Lucas et polynômes de degré 3

On se propose dans cette partie de démontrer un raffinement du théorème de Lucas pour des polynômes de degré 3. Plus précisément, on se propose de montrer le résultat suivant :

Soit $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré 3. On note M_1, M_2 et M_3 les points du plan dont les affixes sont les racines de $f(X)$ et on suppose que M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés. Alors les racines du polynôme dérivé $f'(X)$ sont les affixes :

- des foyers de l'ellipse tangente aux trois côtés du triangle $M_1 M_2 M_3$ en leurs milieux si $M_1 M_2 M_3$ n'est pas équilatéral
- du centre du cercle inscrit dans le triangle $M_1 M_2 M_3$ s'il est équilatéral

I. Étude du cas où $M_1 M_2 M_3$ est un triangle équilatéral

Soit $f(X) = (X - r_1)(X - r_2)(X - r_3) \in \mathbb{C}[X]$ où r_1, r_2 et r_3 sont trois nombres complexes distincts. On suppose que les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives r_1, r_2 et r_3 ne sont pas alignés.

1. Montrer que $f'(X)$ possède une racine double ω si et seulement si le triangle $M_1 M_2 M_3$ est équilatéral et son centre de gravité a pour affixe ω .
2. Conclure.

II. Une propriété de la tangente à l'ellipse

Soit a un réel strictement positif et soient F et F' deux points distincts du plan tels que $FF' < 2a$. On appelle ellipse de foyers F et F' et de demi-axe focal a l'ensemble (\mathcal{E}) des points M du plan tels que :

$$MF + MF' = 2a$$

Soit $t \mapsto M(t)$ une paramétrisation de classe C^1 de l'ellipse. Pour tout point $M(t) \in (\mathcal{E})$, on note $\vec{r}(t) = \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{M(t)F} \right)$ un vecteur directeur de la tangente à (\mathcal{E}) en $M(t)$ et on pose

$$\vec{u}(t) = \frac{1}{M(t)F} \overrightarrow{M(t)F} \quad \text{et} \quad \vec{v}(t) = \frac{1}{M(t)F'} \overrightarrow{M(t)F'}$$

1. Montrer que :

$$\frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{M(t)F} \right) = \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{M(t)F'} \right)$$

2. Montrer que le produit scalaire $(\vec{u}(t) + \vec{v}(t)) \cdot \vec{r}(t)$ est nul.
3. En déduire que la tangente à (\mathcal{E}) en $M(t)$ est une bissectrice du couple de droites $(\overrightarrow{M(t)F}, \overrightarrow{M(t)F'})$.

III. Un théorème de Poncelet

Soit P un point strictement « extérieur » à l'ellipse (\mathcal{E}) (c'est-à-dire un point P tel que $PF + PF' > 2a$) : on admet qu'il existe toujours deux tangentes issues de P à (\mathcal{E}) et on note T_1 et T_2 les points de tangences.

1. Soit F_1 l'image de F par la réflexion d'axe (PT_1) . Montrer que $F'F_1 = 2a$.
2. On note de même F_2 l'image de F par la réflexion d'axe (PT_2) . Montrer que (PF') est la médiatrice de $[HF_2]$.
3. On se propose de montrer que les angles de droites $((PT_1), (PF))$ et $((PF'), (PT_2))$ sont égaux. Pour toute droite D du plan, on note S_D la réflexion d'axe D .

- a. Déterminer $S_{(PF)} \circ S_{(PT_1)}(F_1)$ et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de la composée $S_{(PF)} \circ S_{(PT_1)}$.
- b. Déterminer de la même façon la nature et les éléments caractéristiques de la composée $S_{(PT_2)} \circ S_{(PF)}$ et conclure.

IV. Étude du cas où $M_1 M_2 M_3$ n'est pas équilatéral

Soit $f(X) = (X - r_1)(X - r_2)(X - r_3) \in \mathbb{C}[X]$ où r_1, r_2 et r_3 sont trois nombres complexes distincts. On suppose que les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives r_1, r_2 et r_3 ne sont pas alignés et que le triangle $M_1 M_2 M_3$ n'est pas équilatéral.

On note w et w' (avec $w \neq w'$) les racines du polynôme dérivé $f'(X)$ et F et F' les points d'affixes respectives w et w' .

1. Justifier qu'il existe une ellipse (\mathcal{E}) de foyers F et F' et passant par le milieu de $[M_1 M_2]$.
2. a. Montrer que dans $\mathbb{C}[X]$ on a l'égalité :

$$3(X - w)(X - w') = (X - r_1)(X - r_2) + (X - r_2)(X - r_3) + (X - r_3)(X - r_1).$$

- b. En déduire que :

$$12 \frac{w - \frac{r_1 + r_2}{2}}{r_1 - r_2} = \frac{r_2 - r_1}{w' - \frac{r_1 + r_2}{2}}$$

puis que la droite $(M_1 M_2)$ est tangente à (\mathcal{E}).

3. a. Montrer que :

$$\frac{r_2 - r_1}{w - r_1} = 3 \frac{w' - r_1}{r_3 - r_1}.$$

- b. En déduire que $(M_1 M_3)$ est la deuxième tangente à (\mathcal{E}) issue de M_1 .

4. Conclure.

_____ FIN _____