CAPES épreuve 1 session 2010

INTRODUCTION

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On étudie la série de terme général a_n. On montre qu'elle est convergente et on donne différentes représentations de sa somme, notée γ, et appelée **Constante d'Euler**. Pour cela on commence par étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$définie par :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1).$$

On s'intéresse également à la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $H_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$H_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}.$$

PARTIE I : PREMIÈRE APPROCHE DE LA CONSTANTE D'EULER

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En encadrant l'intégrale $\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, montrer que

$$0 \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, puis qu'elle est convergente et que sa limite γ appartient à l'intervalle $[0\,;\,1]$:
3. Vérifier que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$a_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{t}{t+p}\,\mathrm{d}t,$$

puis montrer que pour tout entier $p \geqslant 2$ on a :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right).$$

4. En déduire un encadrement de $S_m - S_n$ pour m et n des entiers vérifiant $m > n > 1$. Puis montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\frac{1}{2n+2} \leqslant \gamma - S_n \leqslant \frac{1}{2n}.$$

5. Conclure qu'on a le développement asymptotique suivant pour la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$H_n \overset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_n = S_n + \dfrac{1}{2n+2}$. Montrer que

$$0 \leqslant \gamma - T_n \leqslant \frac{1}{2n(n+1)}.$$

7. Déterminer un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel T_n est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.

   Donner alors un encadrement de γ à 10^{-2} près.

PARTIE II : Deux représentations intégrales de la constante d'Euler

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, borné ou non et soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On dira que f est intégrable sur I si l'intégrale impropre de f sur I est absolument convergente.

On admettra le résultat suivant : *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, borné ou non et soit $\sum u_n$ une série de fonctions réelles positives, définies, continues par morceaux et intégrables sur l'intervalle I. Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux et si la série numérique $\sum \int_I u_n$ converge, alors, la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I et on a :*

$$\int_I (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$$

1. Dans cette question, on se propose de démontrer la convergence de l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt.$$

   a. Montrer que les deux intégrales suivantes sont convergentes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\, dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

   b. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{1-e^{-t}} - \dfrac{1}{t}$ quand $t \longmapsto 0^+$.

   c. Conclure.

2. Dans cette question on se propose de démontrer que si a et b sont deux réels strictement positifs, alors la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0\,;\,+1[$ et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt = \ln \frac{b}{a}.$$

   Soient x et y deux réels strictement positifs.

   a. Démontrer que :

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-at}}{t}\, dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-at}}{t}\, dt.$$

   b. Montrer que pour $a \leqslant b$ on a pour tout réel $z > 0$:

$$e^{-bz} \ln \frac{b}{a} \leqslant \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \leqslant e^{-az} \ln \frac{b}{a} \leqslant e^{-az} \ln \frac{b}{a}.$$

   c. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt = \ln \frac{b}{a}.$$

3. **Une première représentation intégrale de la constante d'Euler**

a. Démontrer que pour pour tout réel $t > 0$ on a :

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} \quad \text{et} \quad \frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{-nt} - \mathrm{e}^{-(n+1)t}}{t}\right).$$

b. En déduire que pour pour tout réel $t > 0$ on a :

$$\mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \mathrm{e}^{-(n+2)t}}{t}\right).$$

c. Démontrer que pour tout réel $t > 0$ on a :

$$1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} \geqslant 0.$$

d. Retrouver alors la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$ et démontrer l'égalité :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t.$$

4. Une deuxième représentation intégrale de la constante d'Euler

Soit y un réel strictement positif.

a. Calculer $\displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} \mathrm{d}t$, puis déduire que

$$\lim_{y \to 0^+} \left(\int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} \mathrm{d}t\right) = 0$$

b. Démontrer que :

$$\gamma + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \mathrm{d}t = \int_0^{y} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} \mathrm{d}t.$$

c. En déduire que :

$$\lim_{y \to 0^+} \left(\gamma + \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \mathrm{d}t\right).$$

d. Démontrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \ln t$ est intégrable sur $]0\,;\,+\infty[$ et que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t \, \mathrm{d}t = \lim_{y \to 0^+} \left(\mathrm{e}^{-y} \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \mathrm{d}t\right)$$

e. Conclure alors que :

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t \, \mathrm{d}t$$

PARTIE III : POUR UNE VALEUR APPROCHÉE DE LA CONSTANTE D'EULER

1. a. Démontrer l'égalité suivante :

$$\int_0^{1} \left(\frac{1}{t} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right) \mathrm{d}t = \int_1^{1+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} \mathrm{d}t.$$

(**Indication** : *on pourra calculer chacune des deux intégrales*).

b. En utilisant l'égalité obtenue en II. 3. d., démontrer que :

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{1+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Soit F la fonction définie par $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} x^k$.

(On rappelle que $H_0 = 0$ et pour $k \geqslant 1$, $H_k = \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p}$.)

a. Montrer que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. Démontrer que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$F'(x) - F(x) = \frac{1}{x}\left(\mathrm{e}^x - 1\right).$$

c. Montrer alors que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$F(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

3. Déduire des questions précédentes que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$\gamma + \ln x = \mathrm{e}^{-x} F(x) - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

4. Soit un entier $n \geqslant 1$ et soit un entier $a \geqslant 2$. Montrer que :

$$\sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k \leqslant \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^k \leqslant \frac{a}{a-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{\mathrm{e}}{a}\right)^{an}.$$

(**Indication** : *on pourra admettre et utiliser l'inégalité* : $n! \geqslant \sqrt{2\pi n}\left(\frac{\mathrm{e}}{a}\right)^{an}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.)

5. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\left|\gamma + \ln n - \hat{\mathrm{e}}^{-n} \sum_{k=0}^{an} \frac{H_k}{k!} n^k\right| \leqslant \frac{a}{a-1} \frac{\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{\mathrm{e}}{a}\right)^{an} + \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}.$$

6. Décrire une méthode permettant le calcul d'une valeur approchée de γ à 10^{-10} près. (On ne demande pas le calcul d'une telle valeur approchée.)

PARTIE IV : La constante d'Euler somme de la série de Vacca (1910)

Pour tout entier $p \geqslant 0$, on pose :

$$v_p = p\left(\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1}\right).$$

1. **a.** En séparant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs dans l'expression de v_p, montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$ on a :

$$v_p = p\left(\sigma_{p-1} - \sigma_p\right) \quad \text{où} \quad \sigma_p = \sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{h}.$$

b. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\sum_{p=1}^{n} v_p = \sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p - n\sigma_n.$$

c. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p = H_{2^n} - \frac{1}{2^n}.$$

d. En utilisant le développement asymptotique de H_n, obtenu en I. 5., conclure que la série de terme général v_p est convergente et qu'on a :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} v_p = \gamma.$$

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = (-1)^n \frac{\lfloor \log_2 \rfloor}{n}$$

où $\log_2$ désigne la fonction logarithme en base 2 et $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

a. Expliquer pourquoi le critère spécial des séries alternées ne permet pas de montrer la convergence de la série de terme général u_n.

b. Soit n un entier naturel et soit m un entier tel que : $2^{n+1} \leqslant m < 2^{n+2}$. Montrer que

$$|\sum_{k=2^{n+1}}^{m} \frac{(-1)^k}{k}| \leqslant \frac{1}{2^n},$$

puis en déduire que :

$$|\sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k| \leqslant \frac{n+1}{2^n}.$$

c. Soit n un entier naturel et soit m un entier tel que : $2^{n+1} \leqslant m < 2^{n+2}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{m} u_k = \sum_{p=0}^{n} v_p + \mathcal{O}(\frac{n}{2^n})$$

et en déduire que la série de terme général u_n converge et que l'on a :
X+1

$$\sum_{n=1}^{+\infty} = \gamma.$$

3. On pose pour tout entier naturel n :

$$r_n = \sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

a. Montrer que la série de terme général r_n est absolument convergente.

b. Exprimer v_k en fonction de k, r_k et r_{k+1}. Montrer ensuite que

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} r_k - n r_{n+1}.$$

Conclure que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2^n + j} \right).$$

PARTIE V : La formule de Gosper (1972)

Dans cette partie on désigne par $\mathcal{F}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$. Si $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un élément de $\mathcal{F}$, on notera aussi $x[k]$ le terme x_k de la suite x. On considère l'endomorphisme Δ de $\mathcal{F}$ défini par :

$$\forall x \in \mathcal{F}, \forall k \in \mathbb{N},\ \Delta(x)[k] = x[k] - x[k+1].$$

Pour $n \in \mathbb{N}*$, on note Δ^n l'endomorphisme de $\mathcal{F}$ obtenu en composant Δ avec lui même n fois et on pose $\Delta^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout entier $p \in [0,\ n]$, $\binom{n}{p}$ désigne le coefficient binômial :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathcal{F}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\Delta^n(x)[k] = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} x_{p+k}.$$

(**Indication** : *écrire $\Delta = Id_{\mathcal{F}} - T$ où T est l'endomorphisme de $\mathcal{F}$ défini, pour tout $x \in \mathcal{F}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, par : $T(x)[k] = x[k+1]$.*)

2. Soit $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente et de limite ℓ. On se propose de montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = \ell.$$

a. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $\left(\frac{\binom{n}{p}}{2^n} \right)_{n \geqslant p}$ converge vers 0.

b. On suppose dans cette question $\ell = 0$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = 0.$$

(**Indication** : *On pourra utiliser l'égalité suivante* :

$$\frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p} u_p + \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^{n} \binom{n}{p} u_p$$

et, étant donné un réel $\epsilon > 0$, choisir un entier k suffisamment grand pour que l'on ait
$\left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^{n} \binom{n}{p} u_p \right| < \frac{\epsilon}{2}$).

c. Conclure pour le cas général où ℓ est quelconque.

3. Dans cette question, on se propose de démontrer la propriété suivante : Soit $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}$. Si la série $\sum(-1)^k x_k$ converge, alors, la série de terme général $\dfrac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$ converge et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x_k = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.$$

On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$U_N = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k x_k \quad \text{et} \quad V_N = \sum_{n=0}^{N}\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.$$

a. Démontrer que

$$V_N = \frac{1}{2^{N+1}}\sum_{q=0}^{N}\binom{N+1}{q+1}U_q.$$

(*on pourra observer que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $(-1)^k x_k = U_k - U_{k-1}$, *avec, par convention,* $U_{-1} = 0$).

b. En déduire que la série de terme général $\dfrac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x_k.$$

4. On considère dans cette question un entier $n \geqslant 1$ ainsi que la suite $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_j = \frac{1}{2^n + j}.$$

a. Montrer que pour tout entier $m \geqslant 0$ on a :

$$\Delta^m(x)[0] = \frac{1}{2^n}\frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.$$

Indication : *On pourra admettre et utiliser le résultat suivant : Pour* $m,\ n \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

b. En déduire que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{m+n+1}}\frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.$$

c. Conclure que la constante d'Euler peut s'écrire :

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{2^{p+1}}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{\binom{2^{p-k}+k}{k}}.$$