CAPES épreuve 2 session 2010

Notations

- Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ sera noté plus simplement (a_n). On note (0) la suite constante dont tous les termes sont nuls et on rappelle que deux suites (a_n) et (b_n) sont égales si et seulement si, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ on a $a_k = b_k$.
- Soient (a_n) et (b_n) deux éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on définit leur somme $(a_n)+(b_n)$, leur produit $(a_n)\times(b_n)$ et le produit d'une suite par un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ respectivement par :

  $(a_n)+(b_n) = (a_n + b_n)$

  $(a_n)\times(b_n) = (c_n)$ où, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

  $\lambda \cdot (a_n) = (\lambda a_n)$
- On admet que $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +\right)$ est un groupe commutatif d'élément nul (0).
- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on notera X^p la suite $(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_p & = & 1 \\ x_n & = & 0 \text{ si } n \neq p \end{array}\right.$$

  On écrira aussi X^0 et X^1 respectivement 1 et X.
- Pour tout $(k,\ n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est égal à $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Partie I : série génératrice d'une suite (a_n)

1. Propriétés algébriques

a. Montrer que $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \times\right)$ est un anneau commutatif dont on précisera l'élément neutre.

b. Montrer que $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \times\right)$ est intègre. (Indication : *si (a_n) est un élément non nul de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on pourra considérer le plus petit entier k tel que $a_k \neq 0$.*)

c. Montrer qu'un élément (a_n) de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est inversible dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ si et seulement si $a_0 \neq 0$.

d. Montrer que $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Les résultats précédents montrent que toute suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ peut s'écrire formellement sous la forme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$. Lorsqu'on note $A(X) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ ou $A = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$, alors $A(X)$ ou A sera appelée série génératrice de la suite (a_n). On remarque que par définition du produit des suites on a $X^p \times X^q = X^{p+q}$ pour tout $(p,\ q) \in \mathbb{N}^2$.

D'autre part, si A est une série génératrice, pour tout entier $k \geqslant 2$, A^k désigne le produit

$\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ facteurs}}$.

On remarquera aussi que s'il existe un entier p tel que $a_p \neq 0$ et tel que pour tout entier $n > p$ on a $a_n = 0$ alors la série génératrice de la suite (a_n) n'est autre

qu'un polynôme de degré p qu'on notera $\sum_{n=0}^{p} a_n X^n$.
D'après la question 1. c. ci-dessus, la série génératrice $\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ *est inversible si et seulement si* $a_0 \neq 0$. *Dans toute la suite, si la série génératrice* $A(X)$ *est inversible, on écrira son inverse sous la forme* $\dfrac{1}{A(X)}$. *Plus généralement si la série génératrice* $A(X)$ *est inversible et si* $B(X)$ *est une série génératrice quelconque, le produit* $B(X) \times \dfrac{1}{A(X)}$ *sera noté* $\dfrac{B(X)}{A(X)}$. *Si de plus* $B(X)$ *et* $A(X)$ *sont des séries génératrices sous la forme de polynômes alors* $\dfrac{B(X)}{A(X)}$ *peut être assimilée à une fraction rationnelle sur* $\mathbb{K}$ *et on admet que les techniques de décomposition en éléments simples sur* $\mathbb{K}$ *restent valables pour* $\dfrac{B(X)}{A(X)}$

2. Éléments inversibles

a. Montrer que la série génératrice inversible $\sum_{n\geqslant 0} X^n$ a pour inverse $1-X$, c'est-à-dire que :

$$\frac{1}{1-X} = \sum_{n\geqslant 0} X^n$$

b. Soit $a \in \mathbb{K} - \{0\}$, montrer que :

$$\frac{1}{1-aX} = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$$

c. Soient $a \in \mathbb{K} - \{0\}, b \in \mathbb{K} - \{0\}$ avec $a \neq b$, montrer que :

$$\frac{1}{(1-aX)(1-bX)} = \left(\frac{a}{a-b}\right)\frac{1}{1-aX} + \left(\frac{b}{b-a}\right)\frac{1}{1-bX}$$

3. L'opérateur de dérivation

L'opérateur de dérivation, $D : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est défini par :

$$D : A = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n \mapsto D(A) = \sum_{n\geqslant 1}^{+\infty} n a_n X^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} X^n$$

a. Montrer que D est un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Soient A et B deux séries génératrices. Montrer que :

b. $D(A \times B) = D(A) \times B + A \times D(B)$. (on pourra commencer par traiter le cas où $A = X^p$ et $B = X^q$ où $(p,\ q) \in \mathbb{N}^2$).

c. Si B est inversible

$$D\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{D(A) \times B - A \times D(B)}{B^2}$$

4. Quelques exemples

a. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la série génératrice est :

$$A(X) = \frac{1}{(1-X)^2}$$

est définie pour tout entier n par $a_n = n+1$.

b. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $\left(a_{p,\,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la série génératrice est

$$A_p(X) = \frac{1}{(1-X)^p}$$

est définie pour tout entier n par :

$$a_{p,\,n} = \binom{n+p-1}{n}$$

c. Soit $A(X)$ la série génératrice d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\dfrac{A(X)}{1-X}$ est la série génératrice de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

d. En déduire que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+p-1}{k} = \binom{n+p}{n}$$

Partie II : séries génératrices et suites récurrentes

1. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} a_0 & = & 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & a_{n+1} = 2a_n + n \end{cases}$$

On se propose de déterminer la formule explicite de a_n en fonction de n. On note $A(X)$ la série génératrice de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a. Montrer que :

$$A(X) = 2X \times A(X) + X^2 \times \sum_{n\geqslant 0} (n+1)X^n$$

b. Déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$ de la fraction rationnelle

$$\frac{X2}{(1-X)^2(1-2X)}$$

c. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

2. On considère la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} F_0 & = & 0 \\ F_1 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

et on note $F(X)$ la série génératrice de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a. Montrer que :

$$F(X) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha_1 X} - \frac{1}{1-\alpha_2 X}\right)$$

où

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

b. En déduire l'expression de F_n en fonction de n.

3. Suites récurrentes linéaires d'ordre $k (k \geqslant 1)$.

Soit $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{C}^k$, avec $a_k \neq 0$. On considère l'ensemble $\mathcal{U}$ des suites complexes (u_n) définies par la donnée de $(u_0, \ldots, u_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant k,\ u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \ldots + a_k u_{n-k}.$$

(*On utilisera, sans le démontrer, le fait que* $(\mathcal{U}, +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel*).

Soit $(u_n) \in \mathcal{U}$. On note S la série génératrice de (u_n), et (E) l'équation caractéristique de (u_n) :

$$z^k = a_1 z^{k-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_k \quad (E)$$

a. Montrer que : $\varphi : (u_n) \in \mathcal{U} \mapsto (u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$ est un isomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{C}^k$.

b. On pose $Q(X) = 1 - a_1 X - \ldots - a_k X^k$ et $P(X) = Q(X) \times S(X)$. Montrer que $P(X)$ est un polynôme de degré au plus $k-1$, à coefficients dans $\mathbb{C}$.

c. On note $z_1, \ldots, z_p$ les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les ordres de multiplicité respectifs de $z_1, \ldots, z_p$.

Montrer qu'il existe des nombres complexes $b_{i,\,j},\ 1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant \alpha_i$ tels que :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{b_{i,\,j}}{(X - 1/z_i)^j} \right)$$

d. Montrer alors qu'il existe des polynômes $R_1, \ldots, R_p$ tels que pour tout n

$$u_n = \sum_{i=1}^{p} R_i(n) z_i^n \text{ où } \forall i, deg(R_i) < \alpha_i.$$

e. On note $\mathcal{V}$ l'ensemble des suites (v_n) dont le terme général s'écrit $v_n = \sum_{i=1}^{p} P_i(n) z_i^n$ où pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, P_i est un polynôme tel que $deg(P_i) < \alpha_i$.

Démontrer que $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel dont la dimension vérifie l'inégalité $\dim \mathcal{V} \leqslant k$ et déduire que $\mathcal{V} = \mathcal{U}$.

Partie III : Nombre de partitions d'un ensemble

Soient $k \geqslant 1$ un entier et S un ensemble non vide, on dit que $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ est une partition de S en k classes si :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \ldots, k\},\ S_i \neq \emptyset \\ \forall (i,\ j) \in \{1, \ldots, k\}^2,\ S_i \cap S_j = \emptyset \text{ si } i \neq j \\ \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} S_i = S \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier $k \in \{1, \ldots, k\}$ on note $\left\{ {n \atop k} \right\}$ le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k classes. On pose par convention :

- pour tout entier $n \geqslant 1$: $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$
- pour tout entier $k > n$: $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$
- $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$

1. Donner toutes les partitions de l'ensemble $S = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ en 2 classes.
   Cette question montre que $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$. On se propose dans ce qui suit de calculer $\left\{ {n \atop k} \right\}$ en fonction de n et k.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

   (*On fixera un élément $s \in S$ et on considèrera les partitions contenant le singleton $\{s\}$ et les partitions qui ne le contiennent pas*).
3. On considère la série génératrice

$$A_k(X) = \sum_{n \geqslant 0} \left\{ {n \atop k} \right\} X^n$$

   a. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$A_k(X) = X \times A_{k-1}(X) + kX \times A_k(X)$$

   b. En déduire que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$A_k(X) = \frac{X^k}{\Pi_{m=1}^k (1 - mX)}$$

   c. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{\Pi_{m=1}^k (1 - mX)} = \sum_{r=1}^k \frac{\alpha_r}{1 - rX}$$

   où, pour tout $r \in \{1,\ \ldots,\ k\}$, $\alpha_r = (-1)^{k-r} \dfrac{r^{k-1}}{(r-1)!(k-r)!}$.

   d. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant k$:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{r=1}^k (-1)^{k-r} \frac{r^n}{r!(k-r)!}$$

4. Application : nombre de surjections
   On considère un ensemble E de cardinal n et un ensemble F de cardinal p où n et p sont deux entiers strictement positifs. On se propose de calculer le nombre $S(n,\ p)$ de surjections de E sur F.

   a. Que vaut $S(n,\ p)$ lorsque $p > n$?

   b. Que vaut $S(n,\ n)$?

   c. On suppose maintenant que $p \in \{1,\ \ldots,\ n\}$. Montrer que :

$$S(n,\ p) = p! \left\{ {n \atop k} \right\}$$

Partie IV : Nombre de dérangements

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1,\ \ldots,\ n\}$.
Un dérangement de l'ensemble $\{1,\ \ldots,\ n\}$ est une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sans point fixe c'est-à-dire telle que pour tout entier $i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, $\sigma(i) \neq\ i$. On note d_n le nombre de dérangements de l'ensemble $\{1,\ \ldots,\ n\}$.
On pose $d_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $p_n = \dfrac{d_n}{n!}$.

1. Calculer d_1, d_2 et d_3.
2. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on note B_k l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ ayant exactement k points fixes.

   a. Montrer que le cardinal de B_k vérifie l'égalité : Card $(B_k) = \binom{n}{k} d_{n-k}$ et en déduire que :

   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = n!$$

   b. Soit P la série génératrice de la suite (p_n). Montrer que

   $$E(X) \times P(X) = \sum_{n \geqslant 0} X^n, \text{ où } E(X) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} X^n.$$

   c. Déterminer la série génératrice inverse de $E(X)$.

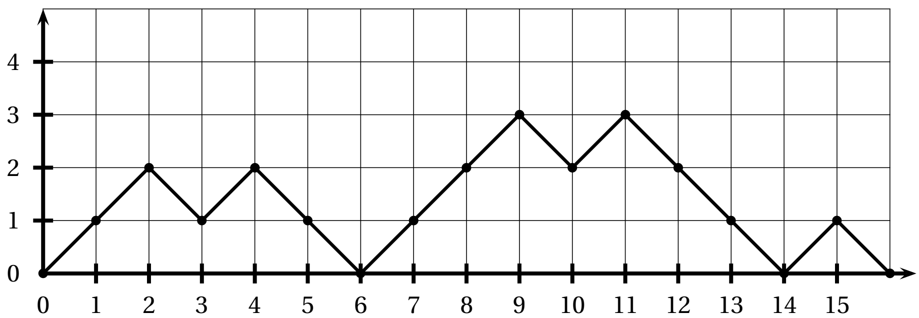
   d. En déduire que

   $$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Partie V : Nombres de Catalan

1. **Chemins de Dyck**

   Le plan est rapporté à un repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on appelle chemin de Dyck de longueur $2n$, toute suite $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$ de points du plan dont les coordonnées sont des entiers positifs tels que $s_0 = (0, 0)$, $s_{2n} = (2n, 0)$ et, tels que, pour tout entier $k \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$, s_{k+1} est l'image de s_k par la translation de vecteur $\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$ ou de vecteur $\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$.
   Voici un chemin de Dyck de longueur 16.



   On note c_n le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$. Les nombres c_n sont appelés **nombres de Catalan**. Pour tout chemin de Dyck $C = (s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$ de longueur $2n$ on note $k(C)$ le plus petit entier tel que $s_{k(C)}$ soit d'ordonnée nulle et d'abscisse non nulle.

   a. Justifier que $k(C)$ est un entier pair.

   b. Montrer que le nombre de chemins de Dyck C de longueur $2n$ tel que $k(C) = 2n$ est égal à c_{n-1}.

   c. Montrer que le nombre de chemins de Dyck C de longueur $2n$ tel que $k(C) = 2p$ avec $p \in \{1, \ldots, n\}$ est égal à $c_{p-1}c_{n-p}$. (Par convention, on pose $c_0 = 1$).

d. En déduire que la suite (c_n) vérifie la relation de récurrence :

$$c_n = \sum_{j=1}^{n} c_{j-1} c_{n-j}.$$

2. Expression des nombres de Catalan

Soit r un nombre rationnel positif. On définit les coefficients binomiaux généralisés par :

$$\begin{cases} \binom{r}{0} & = & 1 \\ \binom{r}{n} & = & \dfrac{\Pi_{k=0}^{n-1}(r-k)}{n!} \text{ pour tout entier } n \geqslant 1 \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique série génératrice $S(X) = \Sigma_{n\geqslant 0} s_n X^n$ telle que :

$$\begin{cases} s_0 & = & 1 \\ S(X)^2 & = & 1-4X \end{cases}$$

et que cette série génératrice est donnée par :

$$S(X) = \sum_{n\geqslant 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4)^n X^n$$

a. Montrer que :

$$S(X) = 1 - \sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n} X^{n+1}$$

b. On pose

$$H(X) = \frac{1}{2}(1-S(X))$$

Vérifier que $H(X) = X + (H(X))^2$.

3. Soit $C(X)$ la série génératrice de la suite (c_n) des nombres de Catalan.

a. Montrer que :

$$X \times C(X) = X + (X \times C(X))^2$$

b. En déduire que, pour tout entier n, on a :

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

puis que, pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$