

Problème 1 : continuité uniforme

Étant donnée une fonction f de variable réelle définie sur un intervalle I d'intérieur non vide, on dit que f est uniformément continue sur I lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon)$$

1. Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition « f n'est pas uniformément continue sur I ».
2. On rappelle qu'une fonction f est lipschitzienne de rapport k , où k est un réel strictement positif, si pour tout couple (x, y) d'éléments de I on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Montrer que toute fonction lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I .

3. a. Montrer que pour tous réels x et y on a :

$$||y| - |x|| \leq |y - x|$$

- b. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|}$$

Montrer que f est uniformément continue sur \mathbb{R}

4. a. Montrer que pour tous réels positifs x et y on a :

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \text{et} \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$$

- b. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur \mathbb{R}_+ .

- c. Montrer que la fonction g n'est pas lipschitzienne sur \mathbb{R}_+ .

5. a. En considérant les deux suites de réels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies pour tout entier n par $x_n = \sqrt{n+1}$ et $y_n = \sqrt{n}$, montrer que la fonction $h : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R} .

- b. La fonction h est-elle lipschitzienne sur \mathbb{R}_+ ?

- c. Soit F un application uniformément continue de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} . On se propose de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$F(x) \leq ax + b$$

6. a. Justifier l'existence d'un réel η_1 strictement positif tel que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, (|x - y| \leq \eta_1 \Rightarrow |F(x) - F(y)| \leq 1)$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$.

- b. Soit η_0 le plus petit entier tel que $\frac{x_0}{\eta_0} \leq \eta_1$; justifier l'existence de η_0 et exprimer n_0 en fonction de x_0 et de η_1 .

c. Montrer que :

$$|F(x_0) - F(0)| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)$$

d. Conclure.

7. a. Les fonctions polynômes de degré supérieur ou égal à 2 sont-elles uniformément continues sur \mathbb{R} ?
 b. La fonction exponentielle est-elle uniformément continue sur \mathbb{R} ?

8. Théorème de Heine

Soit $I = [a ; b]$ ($a < b$) un segment de \mathbb{R} . On se propose de démontrer le théorème de Heine¹ :

si une fonction G est continue sur I alors elle est uniformément continue sur I .

On suppose dans la suite que G est une fonction continue sur $I = [a ; b]$ et que G n'est pas uniformément continue sur I .

- a. Justifier qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de I tels que pour tout entier $n \geq 1$:

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |G(x_n) - G(y_n)| > \epsilon$$

- b. Justifier qu'il existe deux sous-suites $(x_{\sigma(n)})_{n \geq 1}$ et $(y_{\sigma(n)})_{n \geq 1}$ convergentes telles que pour tout entier $n \geq 1$:

$$|(x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)})| \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |(G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)}))| > \epsilon$$

c. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\sigma(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\sigma(n)}$$

d. Conclure.

- e. Soit J un intervalle d'intérieur non vide. Si une fonction G est uniformément continue sur tout intervalle $[a ; b]$ inclus dans J , G est-elle nécessairement uniformément continue sur J ?

Problème 2 : marches aléatoires

Partie A : quelques résultats d'analyse

1. On considère la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

- a. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

1. Eduard Heine (1821-1881), mathématicien allemand

b. En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$

puis que

$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

2. On considère la suite $(K_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$K_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Montrer, à l'aide des outils de terminale scientifique, que la suite $(K_n)_{n \geq 1}$ converge ; on notera K la limite de cette suite (on ne demande pas de calculer K).

3. On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n}$$

On admet la formule de Stirling² :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$;

4. Montrer que, pour tout entier n non nul, on a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

5. En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et que pour tout entier $n \geq 1$:

$$a_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

6. a. Montrer que pour tous réels a et b on a : $(a+b)^2 \geq 4ab$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 \leq \frac{1}{4\sqrt{n(n+1)}}$$

7. a. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$0 \leq a_{n+1} - a_n \leq \frac{1}{8n(n+1)\sqrt{\pi}}$$

b. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout entier $p \geq k$

$$0 \leq a_p - a_k \leq \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}$$

c. En déduire que, pour tout entier k non nul :

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} - a_k \leq \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}$$

2. James Stirling (1692-1770) mathématicien écossais

Partie B : marche aléatoire sur une droite

Soit $(O; \vec{i})$ un axe gradué. Dans la suite du problème, tous les instants considérés sont des nombres entiers naturels.

Une particule située sur un point d'abscisse $k \in \mathbb{Z}$ saute à chaque instant sur le point d'abscisse $k + 1$ ou sur le point d'abscisse $k - 1$, avec la même probabilité.

Chaque saut est indépendant du précédent.

La particule est à l'origine à l'instant $t = 0$.

On note O_k la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = k$ et 0 sinon et U_n la variable aléatoire égale au nombre de passages en O de la particule entre les instants 1 et $2n$ ($n \geq 1$).

1. Exprimer la variable U_n en fonction des variables O_k .
2. Pour tout $k \geq 1$, : montrer que
 - a. $P(O_{2k+1} = 1) = 0$;
 - b. $P(O_{2k} = 1) = \frac{1}{4k} \binom{2k}{k} = \frac{a_k}{\sqrt{k}}$.
3. Calculer l'espérance mathématique $E(U_n)$ de la variable aléatoire U_n et montrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$E(U_n) = \frac{(2n+1)}{4^n} \binom{2n}{n} - 1$$

4. En déduire un équivalent de $E(U_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C : marche aléatoire sur un plan

Un plan est rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Une particule située sur un point de coordonnées $(k; l) \in \mathbb{Z}^2$ saute à chaque instant sur l'un des points de coordonnées $(k+1; l+1)$, $(k+1; l-1)$, $(k-1; l+1)$ ou $(k-1; l-1)$ avec la même probabilité (c'est-à-dire qu'à chaque étape, la particule se déplace selon la diagonale d'un carré).

Chaque saut est indépendant du précédent.

La particule est à l'origine à l'instant $t = 0$.

On note O_k la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = k$ et 0 sinon et U_n la variable aléatoire égale au nombre de passages en O de la particule entre les instants 1 et $2n$ ($n \geq 1$).

1. Exprimer la variable U_n en fonction des variables O_k .
2. Pour tout $k \geq 1$, calculer $P(O_{2k+1} = 1)$ et $P(O_{2k} = 1)$.
3. Montrer que l'espérance de U_n est donnée par :

$$E(U_n) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{k}$$

4. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ on a :

$$\frac{1}{\pi k} - \frac{1}{4\pi k^2} \leq \frac{a_k^2}{k} \leq \frac{1}{\pi k}$$

5. En déduire un équivalent de $E(U_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème 3 : équation de Pell-Fermat

On se propose de déterminer s'il existe des entiers strictement positifs m et n ($m < n$) vérifiant l'égalité :

$$\sum_{k=1}^m k = \sum_{k=m}^n k$$

1. Montrer que ce problème peut se ramener à la recherche d'entiers x, y, m et n ($0 < m < n$) tels que :

$$\begin{cases} x & = 2n + 1 \\ y & = 2m \\ x^2 - 2y^2 & = 1 \end{cases}$$

On note dans ce qui suit (E) l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ d'inconnue $(x; y) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
On range les solutions de (E) dans l'ordre croissant des y .

2. Écrire un algorithme permettant d'obtenir les solutions de (E) pour $y \leq 100$.
3. Déterminer la plus petite (au sens de l'ordre choisi) solution de (E) .
4. a. Montrer qu'il existe deux suites d'entiers $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout entier n non nul :

$$(3 + 2\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$$

- b. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n .
c. Montrer que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes et tendent vers $+\infty$.
5. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $(x_n; y_n)$ est solution de (E) .
On se propose de montrer que l'ensemble $S = \{(x_n; y_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation (E) .
On suppose qu'il existe des couples $(x; y)$ d'entiers positifs solutions de (E) n'appartenant pas à S et on note $(X; Y)$ le plus petit (au sens de l'ordre choisi) de ces couples.
6. Montrer qu'il existe un unique entier N tel que $y_N < Y < y_{N+1}$.
7. Justifier à l'aide de l'algorithme que $N \geq 2$.
8. Montrer que :

$$x_N + y_N\sqrt{2} < X + Y\sqrt{2} < x_{N+1} + y_{N+1}\sqrt{2}$$

9. En déduire que :

$$x_{N-1} + y_{N-1}\sqrt{2} < (3X - 4Y) + (3Y - 2X)\sqrt{2} < x_N + y_N\sqrt{2}$$

10. Montrer que :
a. $3X - 4Y > 0$;
b. $3Y - 2X > 0$;
c. $3Y - 2X < Y$;
d. $(3X - 4Y; 3Y - 2X)$ est solution de (E) .
11. Conclure.
12. Donner les cinq premiers couples d'entiers $(x; y)$ (au sens de l'ordre choisi) solutions de (E) puis les valeurs correspondantes de m et n .