CAPES épreuve 2 session 2012

DEUXIÈME COMPOSITION

Problème 1 : anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

Notations :

- ⋆ Pour un ensemble fini F, on note $\text{card}(F)$ son cardinal.
- ⋆ Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$, on note $\mathscr{I}_n$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ et $\mathscr{N}_n$ l'ensemble des éléments non inversibles.
- ⋆ Pour a et $b \in \mathbb{Z}$, « a divise b » est noté $a|b$, ce qui équivaut à : $\exists k \in \mathbb{Z},\ b = ka$.
- ⋆ Pour a et $b \in \mathbb{Z}$, le plus grand commun diviseur dans $\mathbb{N}$ de a et b est noté $a \wedge b$.
- ⋆ Pour $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, on désigne par $\overline{a}$ la classe de a dans l'ensemble quotient $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$.

  Rappels : on considère $(G, .)$ un groupe fini d'élément neutre 1_G.
- ⋆ Soit $a \in G$. On appelle ordre de a, que l'on note $\omega(a)$, le plus petit élément de l'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N}^\star / a^k = 1_G\right\}$.

  On a alors : $0 < \omega(a) \leqslant \text{card}(G)$ et $a^{\omega(a)} = 1_G$.
- ⋆ Le groupe G est cyclique si et seulement si il existe $a \in G$ tel que

  $\text{card}(G) = \omega(a)$.

Éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

1. Soient $a \in Z$ et $n \in N$ tels que $n > 1$. Démontrer que a est inversible dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ si et seulement si $a \wedge n = 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$. Montrer que $(\mathscr{I}_n, \times)$ est un groupe commutatif.
3. Sans justification, énumérer, dans un tableau ayant deux rangées, les éléments de $\mathscr{I}_{10}$ avec leurs ordres. Ce groupe $(\mathscr{I}_{10}, \times)$ est-il cyclique ?
4. Sans justification, énumérer, dans un tableau ayant deux rangées, les éléments de $\mathscr{I}_{12}$ avec leurs ordres. Ce groupe $(\mathscr{I}_{12}, \times)$ est-il cyclique ?
5. Pour les algorithmes demandés, on utilisera uniquement les opérations $\times$, $+$, $\wedge$ et la fonction de deux variables `reste` où `reste`(a, b) donne le reste de la division euclidienne de a par b pour $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^\star$.

   On pourra également utiliser des boucles de type
   - `for`
   - `while`
   - et la construction `if ... then ... else ....`

   On précisera le logiciel de calcul formel ou le modèle de calculatrice utilisé.

   a. Écrire une procédure `Test ( , )` ayant comme arguments deux entiers naturels k et n avec $n > 1$ affichant « 1 » si $k \in \mathscr{I}_n$ et « 0 » sinon.

   b. Écrire une procédure `Card( )` ayant comme argument un entier n avec $n > 1$ affichant le cardinal de $\mathscr{I}_n$.

   c. Écrire une procédure `Ord( , )` ayant comme arguments deux entiers naturels k et n avec $n > 1$ affichant la valeur de $\omega(k)$, l'ordre de k dans $(\mathscr{I}_n, \times)$, si $k \in \mathscr{I}_n$ et « Erreur » sinon.

Éléments non inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$
Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que n est primaire lorsqu'il existe un nombre premier p et $\alpha \in \mathbb{N}^{\star}$ tels que $n = p^{\alpha}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$ et n ne soit pas primaire.

a. Établir qu'il existe deux entiers, que l'on notera n_1 et n_2, tels que $n = n_1 n_2$, $1 < n_1 < n$ et $n_1 \wedge n_2 = 1$.
On pourra utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers de n.

b. Montrer alors que $(n_1 + n_2) \wedge n = 1$.

c. Établir également que : $\overline{n_1} \notin \mathscr{I}_n$ et $\overline{n_2} \notin \mathscr{I}_n$.

1. On considère p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^{\star}$.
Soit $k \in \mathbb{Z}$. Prouver que : $\overline{k} \in \mathscr{N}_{p^{\alpha}} \iff p|k$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$.
Démontrer que $\mathscr{N}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ si et seulement si n est primaire.

Problème 2 : isométries du plan et de l'espace

On considère $E = \mathbb{R}^n$ (avec $n \in \{2\ ;\ 3\}$) muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien.
Rappels et notations :

- Pour un ensemble fini F, on note card(F) son cardinal.
- E est muni canoniquement d'une structure affine.
- Une application affine de E est une application $f : E \longrightarrow E$ telle qu'il existe une application linéaire $\varphi : E \longrightarrow E$ vérifiant : pour tout $(A,\ B) \in E^2$, $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right)$.
  f étant donnée, l'application φ est unique, elle est appelée *partie linéaire* de f et on la note $\overrightarrow{f}$.
- Une isométrie de E est une application $f : E \longrightarrow E$ vérifiant :

$$\text{pour tout} \quad (A,\ B) \in E^2,\ f(A)f(B) = AB.$$

- Une isométrie de E est une application affine de E.
- Si f est une isométrie de E, on dit que f est un déplacement de E lorsque $\det\left(\overrightarrow{f}\right) > 0$.
- On note $Is(E)$ l'ensemble des isométries de E, $Is^+(E)$ l'ensemble des déplacements et $Is^-(E) = Is(E) \setminus Is^+(E)$.
- L'image d'une droite (resp. d'un plan) de E par une isométrie de E est une droite (resp. un plan).
- Une isométrie de E est une bijection de E sur E.
- $(Is(E), \circ)$ est un groupe et $Is^+(E)$ est un sous-groupe de $(Is(E), \circ)$.
- Si $f \in Is^-(E)$ et $g \in Is^-(E)$, alors $f \circ g \in Is^+(E)$.
- Si $f \in Is^+(E)$ et $g \in Is^-(E)$, alors $f \circ g \in Is^-(E)$.
- Pour une isométrie f de E, on note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ l'application identité de E, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ et f^{-1} la bijection réciproque de f.
- On considère F une partie non vide de E. On note $G(F)$ (respectivement $G^+(F)$) l'ensemble des isométries (respectivement déplacements) de E laissant globalement invariant l'ensemble F.
  Ainsi pour tout $f \in Is(E)$ on a : $f \in G(F) \iff f(F) = F$.
  De plus, on a : $G^+(F) = G(F) \cap Is^+(E)$.
  On définit enfin $G^-(F) = G(F) \setminus G^+(F)$.

Partie A : généralités

1. Soit $f \in Is(E)$.
Établir que $f \in G(F)$ si et seulement si pour tout $M \in F$, on a $\begin{cases} f(M) \in F \\ f^{-1}(M) \in F \end{cases}$
2. Montrer que $G(F)$ et $G^+(F)$ sont des sous-groupes de $(Is(E), \circ)$.
3. Soit $s \in Is(E)$ telle que s soit une symétrie.
Établir que $s \in G(F)$ si et seulement si pour tout $M \in F$, on a $s(M) \in F$.
On rappelle qu'une symétrie σ de E est une application affine telle que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_E$.
4. On suppose qu'il existe $\varphi \in G^-(F)$. On note $\Phi : \begin{cases} G^+(F) & \longrightarrow & G^-(F) \\ f & \longmapsto & \varphi \circ f. \end{cases}$.
   a. Justifier que φ est une application bien définie.
   b. Montrer que φ est une bijection. Démontrer que si $G(F)$ est fini alors $\mathrm{card}(G(F)) = \mathrm{card}(G^+(F))$ ou $\mathrm{card}(G(F)) = 2\mathrm{card}(G^+(F))$.

Partie B : exemples dans le plan euclidien

Dans cette partie, on se place dans le cas où $n = 2$ et on désigne par $\mathscr{P}$ le plan $\mathbb{R}^2$ orienté.
On rappelle que $Is^+(\mathscr{P})$ est constitué des rotations et des translations et que les réflexions (symétries orthogonales par rapport à des droites) sont des éléments de $Is^-(\mathscr{P})$.

Un singleton
Soit Ω un point du plan $\mathscr{P}$.

1. On considère une application $f \in Is^-(\mathscr{P})$ telle que $f(\Omega) = \Omega$.
   a. Justifier qu'il existe $I \in \mathscr{P}$ tel que $f(I) \neq I$. On appelle r la réflexion ayant pour axe la médiatrice de $[I, f(I)]$.
   b. Montrer que $r(\Omega) = \Omega$ puis que $r \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$.
   c. En déduire que f est une réflexion.
2. Démontrer que les éléments de $G(\{\Omega\})$ sont les rotations de centre Ω et les réflexions d'axe passant par Ω.

Une paire
On considère une paire de points du plan, $\mathscr{U} = \{P_1, P_2\}$ où $P_1 \neq P_2$.
On note I le milieu du segment $[P_1, P_2]$.

3. Soit $f \in G(\mathscr{U})$. Montrer que $f(I) = I$.
4. Soit $f \in G^+(\mathscr{U})$ tel que $f \neq \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$. Prouver que f est la symétrie centrale de centre I.
5. Montrer alors que $G(\mathscr{U})$ est formé de quatre éléments : $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$, la symétrie centrale de centre I et deux réflexions.

Une ellipse
On munit le plan $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Les axes de coordonnées sont notés : $(\mathrm{O}x)$ et $(\mathrm{O}y)$.
On considère l'ellipse Γ d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b < a$.
On note $\mathrm{A}(a\ ;\ 0)$ et $\mathrm{A}'(-a\ ;\ 0)$ les sommets principaux de l'ellipse Γ. On note s la symétrie centrale de centre O, r_1 la réflexion d'axe $(\mathrm{O}x)$ et r_2 la réflexion d'axe $(\mathrm{O}y)$, de sorte que, d'après ce qui précède :

$$G\left(\{\mathrm{A}, \mathrm{A}'\}\right) = \{\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}, s, r_1, r_2\}$$

6. Soit $M \in \mathscr{P}$ de coordonnées $(x\,;\,y)$. Donner les coordonnées des points $s(M)$, $r_1(M)$ et $r_2(M)$.
7. Montrer alors que $G\left(\{A,\ A'\}\right) \subset G(\Gamma)$.
   On note $\Delta = \{M \in \mathscr{P} / \mathrm{O}M \leqslant a\}$ le disque fermé de centre O et de rayon a et Λ le cercle de centre O et de rayon a.
8. Pour $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$, représenter sur un même graphique l'ellipse Γ et le cercle Λ.
9. Établir que $\Gamma \subset \Delta$.
10. Montrer que $\Gamma \cap \Lambda = \{A,\ A'\}$.
11. Soient P et P' deux points de Γ.
    a. Montrer que : $PP' \leqslant 2a$.
    b. Établir de plus que : $PP' = 2a \iff \{P,\ P'\} = \{A,\ A'\}$.
12. En déduire que : $G(\Gamma) = G\left(\{A,\ A'\}\right)$.

Partie C : étude d'isométries de l'espace

Pour la fin du problème, on se place dans le cas où $n = 3$. On désigne par $\mathscr{E}$ l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté muni d'un repère orthonormé direct : $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$. Les axes de coordonnées sont notés $(\mathrm{O}x)$, $(\mathrm{O}y)$ et $(\mathrm{O}z)$.
On rappelle qu'un automorphisme u de $\mathscr{E}$ est orthogonal si et seulement si pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathscr{E}$: $\left\|\overrightarrow{u}\left(\overrightarrow{x}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{x}\right\|$ où $\|\ .\ \|$ désigne la norme euclidienne de $\mathscr{E}$.
$O(\mathscr{E})$ désigne l'ensemble des automorphismes orthogonaux de $\mathscr{E}$.
On rappelle qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ${}^tAA = I_3 = A\,{}^tA$ où ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.
L'ensemble des matrices orthogonales (resp. orthogonales de déterminant 1) est noté $O_3(\mathbb{R})$ (resp. $SO_3(\mathbb{R})$).

1. Soit $f \in Is(\mathscr{E})$.
   a. Montrer que $\overrightarrow{f} \in O(\mathscr{E})$.
   On note alors A la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base orthonormale directe $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$, X, X' et B les matrices colonnes respectives des coordonnées des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$, $M'(x'\,;\,y'\,;\,z')$ et $f(\mathrm{O})(\alpha,\beta,\gamma)$ dans le repère $\mathscr{R}$.
   b. Montrer que : $f(M) = M' \iff X' = AX + B$.
   (C'est l'expression analytique de f relativement au repère $\mathscr{R}$.)
   c. Montrer que : $A \in O_3(\mathbb{R})$ puis que : $f \in Is^+(\mathscr{E})$ si et seulement si $A \in SO_3(\mathbb{R})$.

   Pour $i \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\}$ on considère les matrices carrées :

$$A_0 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \text{ et } A_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

2. Justifier que pour $i \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\}$, on a $A_i \in O_3(\mathbb{R})$.
3. Pour quelles valeurs de $i \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\}$, a t-on $A_i \in SO_3(\mathbb{R})$?

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la matrice colonne $B_\lambda = \begin{pmatrix}0\\0\\\lambda\end{pmatrix}$ et on définit les applications t_λ, v_λ, s et r de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ par leur expression analytique :

$$t_\lambda : X' = X + B_\lambda, \quad v_\lambda : X' = A_1X + B_\lambda, \quad s : X' = A_2X, \quad r : X' = A_3X$$

De plus, on note $v = v_0$.

On rappelle que $Is^+(\mathscr{E})$ est constitué des translations, des rotations axiales et des vissages. Les réflexions de $\mathscr{E}$ (symétries orthogonales par rapport à un plan) sont des éléments de $Is^-(\mathscr{E})$.

4. Sans justification, donner la nature des transformations t_λ, v, s et r ainsi que leur(s) élément(s) caractéristique(s).

5. Montrer que $v_\lambda = v \circ t_\lambda = t_\lambda \circ v$ et reconnaître cette transformation en précisant ses éléments caractéristiques.

On pourra utiliser un calcul matriciel.

6. Soient γ et $\delta \in \mathbb{R}$. Montrer que $v_\gamma \circ v_\delta = t_{\gamma+\delta}$ et que $t \circ_\gamma \circ v_\delta = v_{o y + o \gamma + \delta}$.

Partie D : un cylindre à base elliptique

On considère deux réels strictement positifs a et b tels que $a > b$. On considère le cylindre C d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

On considère Π le plan d'équation $z = 0$ et Γ l'intersection du cylindre C et du plan Π.

On remarque que la courbe Γ est l'ellipse d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ repère orthonormé du plan Π.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, on considère la droite d_θ de $\mathscr{E}$ d'équations : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a\cos(\theta) \\ y & = & b\sin(\theta) \end{array}\right.$.

On va montrer que les éléments de $G(C)$ peuvent s'écrire en composant certaines isométries de la partie précédente.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que t_λ, v_λ, s et r sont des éléments de $G(C)$.

2. Montrer que $C = \displaystyle\bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} d_\theta$.

3. Soit $\mathscr{D}$ une droite non parallèle à d_0.

- **a.** Établir que $\mathscr{D}$ admet un vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(\alpha\,;\,\beta\,;\,\gamma)$ tel que α et β ne sont pas simultanément nuls.

  On pourra commencer par donner un vecteur directeur d_θ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
- **b.** On note $M_0\left(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0\right)$ un point de $\mathscr{D}$.

  Donner une équation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ obtenue à l'aide de $\overrightarrow{u}$ et de M_0.
- **c.** Montrer alors que $\mathscr{D}$ coupe C en au plus deux points.

4. Soit $f \in G(C)$. Déduire de la question précédente que $f\left(d_\theta\right)$ est parallèle à la droite $\left(d_\theta\right)$.

5. Soit $f \in G(C)$. Montrer que $\overrightarrow{k}$ est un vecteur propre de $\overrightarrow{f}$.

6. Soit $\varphi \in O(\mathscr{E})$ admettant $\overrightarrow{k}$ comme vecteur propre.

- **a.** Établir que φ admet dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ une matrice de $O_3(\mathbb{R})$, donnée par blocs, de la forme $\begin{pmatrix} & & 0 \\ & M & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$ où $M \in O_2(\mathbb{R})$ et $\epsilon \in \{-1\,;\,1\}$.
- **b.** Vérifier que $\epsilon = \det(\varphi)\det(M)$.

7. Soit $f \in G^+(C)$ tel que $f(\mathrm{O}) \in \Pi$. On admet que $f(\Pi) = \Pi$.

   On peut donc définir $g : \left\{ \begin{array}{lcl} \Pi & \longrightarrow & \Pi \\ M & \longmapsto & g(M) = f(M), \end{array} \right.$ application induite par f sur Π.

   a. Établir que g est une isométrie de Π vérifiant $g(\Gamma) = \Gamma$.

   b. À l'aide de la partie B, énoncer les quatre possibilités pour g puis en déduire que $f(\mathrm{O}) = \mathrm{O}$.

   c. Écrire les quatre possibilités pour la matrice de $\overrightarrow{g}$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}\ ,\ \overrightarrow{\imath}\right)$.

   d. Vérifier alors que l'on peut trouver i et $j \in \{0\ ;\ 1\}$ tels que $f = v^j \circ s^i$.
   On pourra utiliser l'expression analytique de f et la question 6.

8. Soit $f \in G^+(C)$ tel que $f(\mathrm{O}) \notin \Pi$.

   On note O' le projeté orthogonal de $f(\mathrm{O})$ sur le plan Π, t la translation de vecteur $\overrightarrow{f(\mathrm{O})\mathrm{O}'}$ et $h = t \circ f$.

   a. Montrer que $h \in G^+(C)$ et $h(\mathrm{O}) \in \Pi$.
   On pourra commencer par justifier que t peut s'écrire $t = t_\mu$ avec $\mu \in \mathbb{R}^\star$ et utiliser la question 1.

   b. Montrer que l'on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}^\star$, i et $j \in \{0\ ;\ 1\}$ tels que $f = t_\lambda \circ v^j \circ s^i$.

9. Soit $f \in G^-(C)$.

   a. Établir que $r \circ f \in G^+(C)$.

   b. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, i et $j \in \{0\ ;\ 1\}$ tels que $f = r \circ t_\lambda \circ v^j \circ s^i$.

Partie E : une hélice

On reprend dans cette partie les notations de la partie précédente.

On considère l'arc paramétré $M : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ t & \longmapsto & M(t)(a\cos(t)\ ;\ b\sin(t)\ ;\ t) \end{array} \right.$

On note $\mathscr{H}$ la trajectoire de cet arc paramétré.

1. Montrer que $\mathscr{H} \subset C$.
2. Soit $\mathscr{D}$ une droite telle que $\mathscr{D}$ coupe la courbe $\mathscr{H}$ en au moins trois points.
   Montrer alors qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathscr{D} = d_\theta$.
   On pourra utiliser les questions 2. et 3. de la partie D.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que de $d_\theta \cap \mathscr{H} = \{M(\theta + 2k\pi) / k \in \mathbb{Z}\}$.
4. Soient $f \in G(\mathscr{H})$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $f(d_\theta) = d_\omega$.
5. En déduire que $G(\mathscr{H}) \subset G(C)$.
6. Soit $k \in Z$. Montrer que $t_{2k\pi} \in G(\mathscr{H})$.
7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v_\lambda \in G(\mathscr{H})$. Prouver qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda = 2k\pi$.
   On pourra utiliser le fait que $t_\lambda(M(0)) \in \mathscr{H}$.
8. Justifier brièvement que s et $v_\lambda \in G(\mathscr{H})$.
9. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v_\lambda \in G(\mathscr{H})$. Prouver qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda = (2k+1)\pi$.
   On pourra utiliser le fait que $v_\lambda(M(0)) \in \mathscr{H}$.
10. Soit f une isométrie de $\mathscr{E}$. Démontrer que :

$$f \in G^+(H) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \exists i \in \{0\ ;\ 1\}, \left\{ \begin{array}{lcl} f & = & t_{2k\pi} \circ s^i \\ \text{ou} & & \\ f & = & v_{(2k+1)\pi} \circ s^i \end{array} \right.$$

11. On veut montrer que $G(H) = G + (\mathscr{H})$.

Pour cela, on suppose que $G(H) \neq G^+(\mathscr{H})$.

a. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, i et $j \in \{0\ ;\ 1\}$ tels que $r \circ t_\lambda \circ v^j \circ s^i \in G^-(\mathscr{H})$.

b. En déduire que l'on peut trouver un réel noté μ tel que $r \circ t_\mu \in G^-(\mathscr{H})$.

c. Calculer les coordonnées du point $r \circ t_\mu(M(0))$.

d. En déduire que l'on peut trouver $m \in \mathbb{Z}$ tel que $r \circ t_{2m\pi} \in G^-(\mathscr{H})$.

e. En déduire que $r \in G^-(\mathscr{H})$.

f. Calculer les coordonnées du point $r\left(M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

g. Conclure.