CAPES épreuve 1 session 2012

Problème 1 : continuité uniforme

Étant donnée une fonction f de variable réelle définie sur un intervalle I d'intérieur non vide, on dit que f est uniformément continue sur I lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,\ y) \in I^2,\ \left(|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \epsilon\right)$$

1. Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition « f n'est pas uniformément continue sur I ».

2. On rappelle qu'une fonction f est lipschitzienne de rapport k, où k est un réel strictement positif, si pour tout couple $(x,\ y)$ d'éléments de I on a :

$$|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

Montrer que toute fonction lipschitzienne sur I est uniformément continue sur 1.

3. a. Montrer que pour tous réels x et y on a :

$$\big||y|-|x|\big| \leqslant |y-x|$$

b. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$

4. a. Montrer que pour tous réels positifs x et y on a :

$$\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y} \quad \text{et} \quad \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|}$$

b. Montrer que la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

c. Montrer que la fonction g n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

5. a. En considérant les deux suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout entier n par $x_n = \sqrt{n+1}$ et $y_n = \sqrt{n}$, montrer que la fonction $h : x \longmapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction h est-elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$?

c. Soit F un application uniformément continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On se propose de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$F(x) \leqslant ax+b$$

6. a. Justifier l'existence d'un réel η_1 strictement positif tel que :

$$\forall (x,\ y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \left(|x-y| \leqslant \eta_1 \Rightarrow |F(x)-F(y)| \leqslant 1\right)$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$.

b. Soit η_0 le plus petit entier tel que $\dfrac{x_0}{\eta_0} \leqslant \eta_1$; justifier l'existence de η_0 et exprimer n_0 en fonction de x_0 et de η_1.

c. Montrer que :

$$|F(x_0) - F(0)| \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)$$

d. Conclure.

7. a. Les fonctions polynômes de degré supérieur ou égal à 2 sont-elles uniformément continues sur $\mathbb{R}$?

b. La fonction exponentielle est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

8. Théorème de Heine

Soit $I = [a~;~b]$ $(a < b)$ un segment de $\mathbb{R}$. On se propose de démontrer le théorème de Heine[1] :

si une fonction G est continue sur I alors elle est uniformément continue sur I.

On suppose dans la suite que G est une fonction continue sur $I = [a~;~b]$ et que G n'est pas uniformément continue sur I.

a. Justifier qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $\left(y_n\right)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de I tels que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\left|x_n - y_n\right| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \left|G(x_n) - G\left(y_n\right)\right| > \epsilon$$

b. Justifier qu'il existe deux sous-suites $\left(x_{\sigma(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(y_{\sigma(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ convergentes telles que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\left|(x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}\right| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \left|(G\left(x_{\sigma(n)}\right) - G\left(y_{\sigma(n)}\right)\right| > \epsilon$$

c. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = \lim_{n\to+\infty} y_{\sigma(n)}$$

d. Conclure.

e. Soit J un intervalle d'intérieur non vide. Si une fonction G est uniformément continue sur tout intervalle $[a~;~b]$ inclus dans J, G est-elle nécessairement uniformément continue sur J ?

Problème 2 : marches aléatoires

Partie A : quelques résultats d'analyse

1. On considère la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Eduard Heine (1821-1881), mathématicien allemand

a. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$$

b. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

puis que

$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

2. On considère la suite $(K_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$K_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Montrer, à l'aide des outils de terminale scientifique, que la suite $(K_n)_{n\geqslant 1}$ converge ; on notera K la limite de cette suite (on ne demande pas de calculer K).

3. On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n}$$

On admet la formule de Stirling[2] :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$;

4. Montrer que, pour tout entier n non nul, on a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

5. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante et que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$a_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

6. **a.** Montrer que pour tous réels a et b on a : $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4\sqrt{n(n+1}}$$

2. James Stirling (1692-1770) mathématicien écossais

7. **a.** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \frac{1}{8n(n+1)\sqrt{\pi}}$$

b. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$ et tout entier $p \geqslant k$

$$0 \leqslant a_p - a_k \leqslant \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}$$

c. En déduire que, pour tout entier k non nul :

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} - a_k \leqslant \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}$$

Partie B : marche aléatoire sur une droite

Soit $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\right)$ un axe gradué. Dans la suite du problème, tous les instants considérés sont des nombres entiers naturels.
Une particule située sur un point d'abscisse $k \in \mathbb{Z}$ saute à chaque instant sur le point d'abscisse $k+1$ ou sur le point d'abscisse $k-1$, avec la même probabilité.
Chaque saut est indépendant du précédent.
La particule est à l'origine à l'instant $t=0$.
On note O_k la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t=k$ et 0 sinon et U_n la variable aléatoire égale au nombre de passages en O de la particule entre les instants 1 et $2n$ ($n \geqslant 1$).

1. Exprimer la variable U_n en fonction des variables O_k.
2. Pour tout $k \geqslant 1$, : montrer que
   a. $P\left(O_{2k+1}=1\right)=0$;
   b. $P\left(O_{2k}=1\right)=\frac{1}{4k}\binom{2k}{k}=\frac{a_k}{\sqrt{k}}$.
3. Calculer l'espérance mathématique $E\left(U_n\right)$ de la variable aléatoire U_n et montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$E\left(U_n\right)=\frac{(2n+1)}{4^n}\binom{2n}{n}-1$$

4. En déduire un équivalent de $E\left(U_n\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C : marche aléatoire sur un plan

Un plan est rapporté à un repère $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. Une particule située sur un point de coordonnées $(k\,;\,l) \in \mathbb{Z}^2$ saute à chaque instant sur l'un des points de coordonnées $(k+1\,;\,l+1)$, $(k+1\,;\,l-1)$, $(k-1\,;\,l+1)$ ou $(k-1\,;\,l-1)$ avec la même probabilité (c'est-à-dire qu'à chaque étape, la particule se déplace selon la diagonale d'un carré).
Chaque saut est indépendant du précédent.

La particule est à l'origine à l'instant $t = 0$.
On note O_k la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = k$ et 0 sinon et U_n la variable aléatoire égale au nombre de passages en O de la particule entre les instants 1 et $2n$ $(n \geqslant 1)$.

1. Exprimer la variable U_n en fonction des variables O_k.
2. Pour tout $k \geqslant 1$, calculer $P(O_{2k+1} = 1)$ et $P(O_{2k} = 1)$.
3. Montrer que l'espérance de U_n est donnée par :

$$E(U_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{k}.$$

4. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$ on a :

$$\frac{1}{\pi k} - \frac{1}{4\pi k^2} \leqslant \frac{a_k^2}{k} \leqslant \frac{1}{\pi k}$$

5. En déduire un équivalent de $E(U_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème 3 : équation de Pell-Fermat

On se propose de déterminer s'il existe des entiers strictement positifs m et n $(m < n)$ vérifiant l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{m} k = \sum_{k=m}^{n} k.$$

1. Montrer que ce problème peut se ramener à la recherche d'entiers x, y, m et n $(0 < m < n)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2n+1 \\ y & = & 2m \\ x^2 - 2y^2 & = & 1 \end{array}\right.$$

   On note dans ce qui suit (E) l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ d'inconnue $(x\,;\,y) \in \left(N^\star\right)^2$. On range les solutions de (E) dans l'ordre croissant des y.
2. Écrire un algorithme permettant d'obtenir les solutions de (E) pour $y \leqslant 100$.
3. Déterminer la plus petite (au sens de l'ordre choisi) solution de (E).
4. **a.** Montrer qu'il existe deux suites d'entiers $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ telles que, pour tout entier n non nul :

$$\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{2}$$

   b. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.
   c. Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont strictement croissantes et tendent vers $+\infty$.

5. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ est solution de (E).

On se propose de montrer que l'ensemble $S = \left\{\left(x_n\ ;\ y_n\right),\ n \in N^{\star}\right\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation (E).

On suppose qu'il existe des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers positifs solutions de (E) n'appartenant pas à S et on note $(X\ ;\ Y)$ le plus petit (au sens de l'ordre choisi) de ces couples.

6. Montrer qu'il existe un unique entier N tel que $y_N < Y < y_{N+1}$.

7. Justifier à l'aide de l'algorithme que $N \geqslant 2$.

8. Montrer que :

$$x_N + y_N\sqrt{2} < X + Y\sqrt{2} < x_{N+1} + y_{N+1}\sqrt{2}$$

9. En déduire que :

$$x_{N-1} + y_{N-1}\sqrt{2} < (3X - 4Y) + (3Y - 2X)\sqrt{2} < x_N + y_N\sqrt{2}$$

10. Montrer que :

a. $3X - 4Y > 0$;

b. $3Y - 2X > 0$;

c. $3Y - 2X < Y$;

d. $(3X - 4Y\ ;\ 3Y - 2X)$ est solution de (E).

11. Conclure.

12. Donner les cinq premiers couples d'entiers $(x\ ;\ y)$ (au sens de l'ordre choisi) solutions de (E) puis les valeurs correspondantes de m et n.