

CAPES épreuve 1 session 2013

A. P. M. E. P.

Problème 1 : nombres irrationnels

L'ensemble des nombres rationnels est noté \mathbb{Q} .

On rappelle que tout nombre rationnel non nul peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers relatifs premiers entre eux.

Un nombre réel est dit irrationnel s'il n'appartient pas à \mathbb{Q} .

Dans ce problème, on se propose de démontrer l'irrationalité de quelques nombres réels.

Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

Partie A : quelques exemples de nombres irrationnels

1. Soit n un entier naturel. Démontrer que si \sqrt{n} n'est pas entier, alors il est irrationnel.
2. En déduire que si p désigne un nombre premier, alors \sqrt{p} est irrationnel.
3. Démontrer que le nombre $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.
4. On rappelle que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. On se propose de démontrer que le nombre e est un nombre irrationnel.

Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe p et q , entiers naturels non nuls, tels que $e = \frac{p}{q}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

- a. Démontrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis montrer que :

$$u_q < e \leq v_q$$

- b. Aboutir à une contradiction en multipliant les termes de cet encadrement par $q! \times q$.

Partie B : une preuve de l'irrationalité de π

On se propose ici de démontrer que le nombre π est un nombre irrationnel.

Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe a et b , entiers naturels non nuls, tels que $\pi = \frac{a}{b}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Étant donné un entier naturel non nul n et un réel x , on pose :

$$P_n(x) = \frac{x^n (a - bx)^n}{n!} \quad \text{et} \quad P_0(x) = 1.$$

Étant donné un entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^\pi P_n(x) dx$$

1. a. Pour un entier naturel n non nul, exprimer la dérivée de P_n en fonction de P_{n-1} .
- b. Calculer $\sup_{x \in [0; \pi]} |P_n(x)|$ en fonction de a, b et n .
- c. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n\left(\frac{a}{b} - x\right) = P_n(x).$$

- d. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n > 0.$$

- e. Après avoir justifié que la suite de terme général $\frac{\pi}{n} \left(\frac{a^2}{4b}\right)^n$ tend vers 0, démontrer la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.
2. Pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k de P_n est notée $P_n^{(k)}$. Par définition, $P_n^{(0)} = P_n$.
En distinguant les trois cas suivants, démontrer que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)$ sont des entiers relatifs :
 - a. $0 \leq k \leq n - 1$
 - b. $n \leq k \leq 2n$
 - c. $k \geq 2n + 1$
 Pour le cas b, on pourra utiliser la relation entre $P_n^{(k)}(0)$ et le coefficient de x^k dans $P_n(x)$.
 3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n , I_n est un entier relatif. On pourra procéder par intégrations par parties successives.
 - b. Conclure quant à l'hypothèse $\pi = \frac{a}{b}$.

Partie C : développement en série de Engel et applications

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers telle que $a_0 \geq 2$. Démontrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{a_0 \cdots a_k}$$

est convergente de limite inférieure ou égale à $\frac{1}{a_0 - 1}$.

Si x désigne la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on dit que x admet un développement en série de Engel.

On notera $x = [a_0, \dots, a_n, \dots]$.

2. Soit $x \in]0; 1[$. On définit deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $x_0 = x$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 1 + E\left(\frac{1}{x_n}\right) \quad \text{et} \quad x_{n+1} = a_n x_n - 1 \text{ où } E \text{ désigne la fonction partie entière.}$$

- a. Démontrer que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien définies.
- b. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- c. Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que $a_0 \geq 2$.

d. En reprenant les notations de la question 1, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x = S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n}$$

En déduire que x admet un développement en série de Engel.

3. On suppose qu'il existe deux suites distinctes croissantes d'entiers $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $a_0 \geq 2, b_0 \geq 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [a_0, \dots, a_n, \dots] = [b_0, \dots, b_n, \dots]$$

On pose $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\}$

a. Démontrer que $[a_{n_0}, \dots, a_n, \dots] = [b_{n_0}, \dots, b_n, \dots]$.

b. Démontrer que si $x = [a_{n_0}, \dots, a_n, \dots]$ alors $a_0 x - 1 \leq x$ et en déduire que $a_0 = 1 + E\left(\frac{1}{x}\right)$.

c. En déduire l'unicité du développement en série de Engel d'un réel donné dans l'intervalle $]0 ; 1]$.

4. Déterminer le réel dont le développement en série de Engel est associé à :

a. une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ constante égale à c ($c \geq 2$).

b. la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n + 2$.

c. la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (2n + 1)(2n + 2)$.

5. Déterminer le développement en série de Engel du nombre $\text{ch}(\sqrt{2}) - 2$.

6. Démontrer que $x \in]0 ; 1]$ est rationnel si et seulement si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de son développement en série de Engel est stationnaire.

Pour le sens direct, on pourra commencer par procéder à la division euclidienne du dénominateur de x par son numérateur.

Problème 2 : statistiques et probabilités

Partie A : deux indicateurs de dispersion

En 1801, un astronome italien, Piazzi découvre une nouvelle planète Cérès, qu'il perd bientôt de vue. Le problème posé alors aux scientifiques est le suivant : comment, à partir d'une série de résultats d'observations effectuées par différents astronomes, choisir une valeur qui se rapproche le plus possible de la « vraie position » et prédire ainsi le futur passage de Cérès. Deux options s'affrontent : celle de Laplace, qui propose de minimiser les valeurs absolues des écarts et celle de Gauss et Legendre, qui proposent de minimiser les carrés des écarts.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et (x_1, \dots, x_n) , un n -uplet de réels.

On définit sur \mathbb{R} les deux fonctions G et L par :

$$G(X) = \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2$$

$$L(x) = \sum_{i=1}^n |x - x_i|$$

1. Minimisation de G

- a. En écrivant $G(x)$ sous la forme d'un trinôme du second degré, démontrer que la fonction G admet un minimum sur \mathbb{R} et indiquer pour quelle valeur de x il est atteint.
- b. Que représente d'un point de vue statistique la valeur de x trouvée à la question 1 b ?

2. Minimisation de L

On supposera dans cette question que la série est ordonnée, c'est-à-dire que : $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.

- a. Représenter graphiquement la fonction L dans le cas où :
 $n = 3, x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 4$
- b. Représenter graphiquement la fonction L dans le cas où :
 $n = 4, x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 7$
- c. Démontrer que la fonction L admet un minimum m sur \mathbb{R} et indiquer pour quelle(s) valeur(s) de x il est atteint.
On distinguera les cas n pair et n impair.
- d. Que représentent d'un point de vue statistique les valeurs de x trouvées à la question 2. c. ?

Le 7 décembre 1801, Cérès sera observée à l'endroit prévu par les calculs de Gauss. Il prolongera ce travail en établissant, grâce à la théorie des probabilités, que la répartition des erreurs suit une loi normale.

Partie B : théorie de l'information, le cas discret

La théorie de l'information est un modèle mathématique créé par Claude Shannon en 1948, qui vise à quantifier mathématiquement la notion d'incertitude. Elle a depuis connu des développements aussi bien en statistique qu'en physique théorique ou en théorie du codage.

On se place dans cette partie dans un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Étant donné un entier naturel non nul n , on considère un système complet d'événements $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ de probabilités respectives (p_1, \dots, p_n) toutes non nulles. On définit l'entropie de ce système par le nombre :

$$H(A) = - \sum_{k=1}^n p_k \ln p_k$$

Ce nombre quantifie l'incertitude, tandis que son opposé quantifie la quantité d'information. L'entropie doit être maximale lorsqu'aucune hypothèse ne peut être privilégiée.

1. Deux exemples

On se place ici dans le cas $n = 4$.

Quatre chevaux sont au départ d'une course, et on note A_i l'évènement : *Le cheval numéro i remporte la course.* Calculer dans chacun des cas suivants l'entropie du système.

- a. $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$
- b. $p_1 = \frac{1}{8}, p_2 = \frac{1}{8}, p_3 = \frac{1}{4}, p_4 = \frac{1}{2}$

On va à présent établir la propriété générale suivante :

l'entropie est maximale lorsqu'aucune hypothèse ne peut être privilégiée, c'est-à-dire lorsqu'il y a équiprobabilité.

2. Cas $n = 2$

On considère un système complet $A = \{A_1, A_2\}$.

On pose $p_1 = p$ et $p_2 = 1 - p$.

Démontrer que l'entropie est maximale lorsque les deux évènements A_1 et A_2 sont équiprobables.

3. Cas général

a. Un résultat préliminaire : l'inégalité de Jensen

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I . On dit que f est convexe sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0; 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

On considère une fonction f convexe sur I , $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ avec $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$

Démontrer que :

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

On pourra procéder par récurrence sur n , en remarquant que si $\lambda_n \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \lambda_n x_n + (1 - \lambda_n) \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_n} x_k\right)$$

b. On admet le théorème suivant :

si f est deux fois dérivable sur I , f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I .

Démontrer que la fonction $x \mapsto x \ln x$ est convexe sur $]0; 1[$.

c. Démontrer que $H(A) \leq \ln n$. Conclure.

Partie C : théorie de l'information, le cas continu

Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur \mathbb{R} . On rappelle que f est une densité de probabilité sur \mathbb{R} si f est positive, intégrable sur \mathbb{R} , et que $\int_{\mathbb{R}} f = 1$.
Lorsqu'en plus $f \ln f$ est intégrable, on définit l'entropie associée à f par :

$$H(f) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln(f(x)) dx$$

On désigne par \mathcal{H} l'ensemble des densités de probabilités qui possèdent une entropie. Le but de cette partie est de déterminer quelle densité maximise l'entropie, c'est-à-dire correspond à la quantité minimale d'information.

1. Deux exemples

On admet que les deux fonctions suivantes sont des densités de probabilité. Calculer l'entropie associée à chacune d'elles.

a. g définie sur \mathbb{R} par $g(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$.

b. h définie par $h(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ si $t \geq 0$, $h(t) = 0$ sinon, où λ est un réel strictement positif.

2. Deux résultats préliminaires

- a. Démontrer que pour tous réels strictement positifs x et y :

$$x \ln y \leq x \ln x + y - x \quad \text{et} \quad x \ln y = x \ln x + y - x \iff x = y$$

- b. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$, avec $a < b$. Démontrer que :

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow \forall x \in [a; b], f(x) = 0$$

On pourra procéder par contraposition.

3. Une maximisation d'entropie sous contrainte de moyenne et de variance

On s'intéresse dans cette question aux fonctions de \mathcal{H} d'espérance nulle et de variance égale à 1, c'est-à-dire telles que :

- $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur \mathbb{R} d'intégrale nulle
- $t \mapsto t^2f(t)$ est intégrable sur \mathbb{R} d'intégrale égale à 1.

On appelle \mathcal{N} cet ensemble.

- a. Démontrer que $g \in \mathcal{N}$, où g désigne la fonction définie à la question 1 a
- b. Soit f un élément de \mathcal{N} . Démontrer que :

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln(g(x)) dx = H(g)$$

- c. En utilisant les résultats de la question 2, démontrer que :

- $H(f) \leq H(g)$
- $H(f) = H(g) \iff f = g$