# CAPES épreuve 1 session 2013

## Problème 1 : nombres irrationnels

*L'ensemble des nombres rationnels est noté* $\mathbb{Q}$.
*On rappelle que tout nombre rationnel non nul peut s'écrire sous la forme* $\dfrac{p}{q}$, *où* $p$ *et* $q$ *sont des entiers relatifs premiers entre eux.*
*Un nombre réel est dit irrationnel s'il n'appartient pas à* $\mathbb{Q}$.
*Dans ce problème, on se propose de démontrer l'irrationalité de quelques nombres réels.*
*Les trois parties de ce problème sont indépendantes.*

### Partie A : quelques exemples de nombres irrationnels

1. Soit $n$ un entier naturel. Démontrer que si $\sqrt{n}$ n'est pas entier, alors il est irrationnel.
2. En déduire que si $p$ désigne un nombre premier, alors $\sqrt{p}$ est irrationnel.
3. Démontrer que le nombre $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.
4. On rappelle que $\mathrm{e} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. On se propose de démontrer que le nombre e est un nombre irrationnel.
   Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe $p$ et $q$, entiers naturels non nuls, tels que $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.
   Pour tout entier naturel $n$, on pose :
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$
   **a.** Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis montrer que :
$$u_q \leqslant \mathrm{e} \leqslant v_q$$
   **b.** Aboutir à une contradiction en multipliant les termes de cet encadrement par $q! \times q$.

### Partie B : une preuve de l'irrationalité de $\pi$

On se propose ici de démontrer que le nombre $\pi$ est un nombre irrationnel.
Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe $a$ et $b$, entiers naturels non nuls, tels que $\pi = \dfrac{a}{b}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.
Étant donnés un entier naturel non nul $n$ et un réel $x$, on pose :
$$P_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \quad \text{et} \quad P_0(x) = 1.$$
Étant donné Un entier naturel $n$, on pose :
$$I_n = \int_0^{\pi} P_n(x)\,\mathrm{d}x$$

1. **a.** Pour un entier naturel $n$ non nul, exprimer la dérivée de $P_n$ en fonction de $P_{n-1}$.

   **b.** Calculer $\sup\limits_{x\in[0\,;\,\pi]} |P_n(x)|$ en fonction de $a, b$ et $n$.

   **c.** Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad P_n\left(\frac{a}{b} - x\right) = P_n(x).$$

   **d.** Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad I_n > 0.$$

   **e.** Après avoir justifié que la suite de terme général $\dfrac{\pi}{n}\left(\dfrac{a^2}{4b}\right)^n$ tend vers 0, démontrer la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

2. Pour tout entier naturel $k$, la dérivée d'ordre $k$ de $P_n$ est notée $P_n^{(k)}$. Par définition, $P_n^{(0)} = P_n$.

   En distinguant les trois cas suivants, démontrer que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ sont des entiers relatifs :

   **a.** $0 \leqslant k \leqslant n-1$

   **b.** $n \leqslant k \leqslant 2n$

   **c.** $k \geqslant 2n+1$

   Pour le cas b, on pourra utiliser la relation entre $P_n^{(k)}(0)$ et le coefficient de $x^k$ dans $P_n(x)$.

3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $I_n$ est un entier relatif. On pourra procéder par intégrations par parties successives.

   **b.** Conclure quant à l'hypothèse $\pi = \dfrac{a}{b}$.

### Partie C : développement en série de Engel et applications

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers telle que $a_0 \geqslant 2$. Démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 \cdots a_k}$$

   est convergente de limite inférieure ou égale à $\dfrac{1}{a_0 - 1}$.

   **Si $x$ désigne la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on dit que $x$ admet un développement en série de Engel.**

   On notera $x = [a_0, \cdots, a_n, \cdots]$.

2. Soit $x \in ]0\,;\,1]$. On définit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $x_0 = x$ et :

$\forall n \in \mathbb{N}\quad a_n = 1+\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ et $x_{n+1} = a_n x_n - 1$où E désigne la fonction partie entière.

   **a.** Démontrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.

   **b.** Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   **c.** Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $a_0 \geqslant 2$.

**d.** En reprenant les notations de la question 1, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x = S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n}$$

En déduire que $x$ admet un développement en série de Engel.

**3.** On suppose qu'il existe deux suites distinctes croissantes d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 \geqslant 2, b_0 \geqslant 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [a_0, \cdots, a_n, \cdots] = [b_0, \cdots, b_n, \cdots]$$

On pose $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} | a_n \neq b_n\}$

**a.** Démontrer que $\left[a_{n_0}, \cdots, a_n, \cdots\right] = \left[b_{n_0}, \cdots, b_n, \cdots\right]$.

**b.** Démontrer que si $x = \left[a_{n_0}, \cdots, a_n, \cdots\right]$ alors $a_0 x - 1 \leqslant x$ et en déduire que $a_0 = 1 + \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

**c.** En déduire l'unicité du développement en série de Engel d'un réel donné dans l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

**4.** Déterminer le réel dont le développement en série de Engel est associé à :

**a.** une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à $c$ $(c \geqslant 2)$.

**b.** la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n + 2$.

**c.** la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (2n+1)(2n+2)$.

**5.** Déterminer le développement en série de Engel du nombre $\mathrm{ch}\left(\sqrt{2}\right) - 2$.

**6.** Démontrer que $x \in ]0\ ;\ 1]$ est rationnel si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de son développement en série de Engel est stationnaire.

Pour le sens direct, on pourra commencer par procéder à la division euclidienne du dénominateur de $x$ par son numérateur.

## Problème 2 : statistiques et probabilités

### Partie A : deux indicateurs de dispersion

*En 1801, un astronome italien, Piazzi découvre une nouvelle planète Cérès, qu'il perd bientôt de vue. Le problème posé alors aux scientifiques est le suivant : comment, à partir d'une série de résultats d'observations effectuées par différents astronomes, choisir une valeur qui se rapproche le plus possible de la « vraie position » et prédire ainsi le futur passage de Cérès. Deux options s'affrontent : celle de Laplace, qui propose de minimiser les valeurs absolues des écarts et celle de Gauss et Legendre, qui proposent de minimiser les carrés des écarts.*

Dans cette partie, $n$ désigne un entier naturel non nul et $(x_1, \cdots, x_n)$, un $n$-uplet de réels.
On définit sur $\mathbb{R}$ les deux fonctions $G$ et $L$ par :

$$\begin{aligned} G(X) &= \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2 \\ L(x) &= \sum_{i=1}^{n} |x - x_i| \end{aligned}$$

**1. Minimisation de $G$**

**a.** En écrivant $G(x)$ sous la forme d'un trinôme du second degré, démontrer que la fonction $G$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et indiquer pour quelle valeur de $x$ il est atteint.

**b.** Que représente d'un point de vue statistique la valeur de $x$ trouvée à la question 1 b ?

**2. Minimisation de *L***

On supposera dans cette question que la série est ordonnée, c'est-à-dire que : $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$.

**a.** Représenter graphiquement la fonction $L$ dans le cas où :
$n = 3, x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 4$

**b.** Représenter graphiquement la fonction $L$ dans le cas où :
$n = 4, x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 7$

**c.** Démontrer que la fonction $L$ admet un minimum $m$ sur $\mathbb{R}$ et indiquer pour quelle(s) valeur(s) de $x$ il est atteint.
On distinguera les cas $n$ pair et $n$ impair.

**d.** Que représentent d'un point de vue statistique les valeurs de $x$ trouvées à la question 2 c ?

*Le 7 décembre 1801, Cérès sera observée à l'endroit privu par les calculs de Gauss. Il prolongera ce travail en établissant, grâce à la théorie des probabilités, que la répartition des erreurs suit une loi normale.*

### Partie B : théorie de l'information, le cas discret

*La théorie de l'information est un modèle mathématique créé par Claude Shannon en 1948, qui vise à quantifier mathématiquement la notion d'incertitude. Elle a depuis connu des développements aussi bien en statistique qu'en physique théorique ou en théorie du codage.*

On se place dans cette partie dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Étant donné un entier naturel non nul $n$, on considère un système complet d'évènements $A = \{A_1, \cdots, A_n\}$ de probabilités respectives $\left(p_1, \cdots, p_n\right)$ toutes non nulles.
On définit l'entropie de ce système par le nombre :

$$H(A) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln p_k$$

Ce nombre quantifie l'incertitude, tandis que son opposé quantifie la quantité d'information. L'entropie doit être maximale lorsqu'aucune hypothèse ne peut être privilégiée.

**1. Deux exemples**

On se place ici dans le cas $n = 4$.

Quatre chevaux sont au départ d'une course, et on note $A_i$ l'évènement : *Le cheval numéro i remporte la course.* Calculer dans chacun des cas suivants l'entropie du système.

**a.** $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$

**b.** $p_1 = \dfrac{1}{8}, p_2 = \dfrac{1}{8}, p_3 = \dfrac{1}{4}, p_4 = \dfrac{1}{2}$

On va à présent établir la propriété générale suivante :

l'entropie est maximale lorsqu'aucune hypothèse ne peut être privilégiée, c'est-à-dire lorsqu'il y a équiprobabilité.

2. **Cas** $n = 2$

   On considère un système complet $A = \{A_1, A_2\}$.

   On pose $p_1 = p$ et $p_2 = 1 - p$.

   Démontrer que l'entropie est maximale lorsque les deux évènements $A_1$ et $A_2$ sont équiprobables.

3. **Cas général**

   **a. Un résultat préliminaire : l'inégalité de Jensen**

   Soit $f$ une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle $I$. On dit que $f$ est convexe sur $I$ si :

   $$\forall (x,\ y) \in I^2, \forall \lambda \in [0\ ;\ 1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

   On considère une fonction $f$ convexe sur $I$, $(x_1, \cdots, x_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$

   Démontrer que :

   $$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

   *On pourra procéder par récurrence sur n, en remarquant que si* $\lambda_n \neq 1$ *:*

   $$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \lambda_n x_n + (1-\lambda_n)\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n}\right)$$

   **b.** On admet le théorème suivant :

   si $f$ est deux fois dérivable sur $I$, $f$ est convexe sur $I$ si et seulement si $f''$ est positive sur $I$.

   Démontrer que la fonction $x \longmapsto x \ln x$ est convexe sur $]0\ ;\ 1[$.

   **c.** Démontrer que $H(A) \leqslant \ln n$. Conclure.

**Partie C : théorie de l'information, le cas continu**

Soit $f$ une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $f$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ si $f$ est positive, intégrable sur $\mathbb{R}$, et que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = 1$

Lorsqu'en plus $f \ln f$ est intégrable, on définit l'entropie associée à $f$ par :

$$H(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln(f(x))\, \mathrm{d}x$$

On désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble des densités de probabilités qui possèdent une entropie. Le but de cette partie est de déterminer quelle densité maximise l'entropie, c'est-à-dire correspond à la quantité minimale d'information.

1. **Deux exemples**

   On admet que les deux fonctions suivantes sont des densités de probabilité. Calculer l'entropie associée à chacune d'elles.

   **a.** $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$.

   **b.** $h$ définie par $h(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ si $t \geqslant 0$, $h(t) = 0$ sinon, où $\lambda$ est un réel strictement positif.

2. **Deux résultats préliminaires**

**a.** Démontrer que pour tous réels strictement positifs $x$ et $y$ :

$$x \ln y \leqslant x \ln x + y - x \quad \text{et} \quad x \ln y = x \ln x + y - x \iff x = y$$

**b.** Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, avec $a < b$. Démontrer que :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \forall x \in [a\ ;\ b],\ f(x) = 0$$

On pourra procéder par contraposition.

**3. Une maximisation d'entropie sous contrainte de moyenne et de variance**

On s'intéresse dans cette question aux fonctions de $\mathscr{H}$ d'espérance nulle et de variance égale à 1, c'est-à-dire telles que :

- $t \longmapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale nulle
- $t \longmapsto t^2 f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale égale à 1.

On appelle $\mathscr{N}$ cet ensemble.

**a.** Démontrer que $g \in \mathscr{N}$, où $g$ désigne la fonction définie à la question 1 a

**b.** Soit $f$ un élément de $\mathscr{N}$. Démontrer que :

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln(g(x))\,\mathrm{d}x = H(g)$$

**c.** En utilisant les résultats de la question 2, démontrer que :

- $H(J) \leqslant H(g)$
- $H(J) = H(g) \iff f = g$