

Problème 1 : nombres irrationnels

L'ensemble des nombres rationnels est noté  $\mathbb{Q}$ .

On rappelle que tout nombre rationnel non nul peut s'écrire sous la forme  $\frac{p}{q}$ , où  $p$  et  $q$  sont des entiers relatifs premiers entre eux.

Un nombre réel est dit irrationnel s'il n'appartient pas à  $\mathbb{Q}$ .

Dans ce problème, on se propose de démontrer l'irrationalité de quelques nombres réels.

Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

**Partie A : quelques exemples de nombres irrationnels**

1. Soit  $n$  un entier naturel. Démontrer que si  $\sqrt{n}$  n'est pas entier, alors il est irrationnel.
2. En déduire que si  $p$  désigne un nombre premier, alors  $\sqrt{p}$  est irrationnel.
3. Démontrer que le nombre  $\frac{\ln 2}{\ln 3}$  est irrationnel.
4. On rappelle que  $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ . On se propose de démontrer que le nombre  $e$  est un nombre irrationnel.

Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe  $p$  et  $q$ , entiers naturels non nuls, tels que  $e = \frac{p}{q}$  et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

- a. Démontrer que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes, puis montrer que :

$$u_q < e \leq v_q$$

- b. Aboutir à une contradiction en multipliant les termes de cet encadrement par  $q! \times q$ .

**Partie B : une preuve de l'irrationalité de  $\pi$**

On se propose ici de démontrer que le nombre  $\pi$  est un nombre irrationnel.

Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe  $a$  et  $b$ , entiers naturels non nuls, tels que  $\pi = \frac{a}{b}$  et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Étant donné un entier naturel non nul  $n$  et un réel  $x$ , on pose :

$$P_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \quad \text{et} \quad P_0(x) = 1.$$

Étant donné Un entier naturel  $n$ , on pose :

$$I_n = \int_0^\pi P_n(x) dx$$

1. a. Pour un entier naturel  $n$  non nul, exprimer la dérivée de  $P_n$  en fonction de  $P_{n-1}$ .
- b. Calculer  $\sup_{x \in [0; \pi]} |P_n(x)|$  en fonction de  $a, b$  et  $n$ .
- c. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n\left(\frac{a}{b} - x\right) = P_n(x).$$

- d. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n > 0.$$

- e. Après avoir justifié que la suite de terme général  $\frac{\pi}{n} \left(\frac{a^2}{4b}\right)^n$  tend vers 0, démontrer la convergence de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et déterminer sa limite.
2. Pour tout entier naturel  $k$ , la dérivée d'ordre  $k$  de  $P_n$  est notée  $P_n^{(k)}$ . Par définition,  $P_n^{(0)} = P_n$ .  
En distinguant les trois cas suivants, démontrer que  $P_n^{(k)}(0)$  et  $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)$  sont des entiers relatifs :
    - a.  $0 \leq k \leq n-1$
    - b.  $n \leq k \leq 2n$
    - c.  $k \geq 2n+1$
 Pour le cas b, on pourra utiliser la relation entre  $P_n^{(k)}(0)$  et le coefficient de  $x^k$  dans  $P_n(x)$ .
  3. a. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $I_n$  est un entier relatif. On pourra procéder par intégrations par parties successives.
  - b. Conclure quant à l'hypothèse  $\pi = \frac{a}{b}$ .

### Partie C : développement en série de Engel et applications

1. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante d'entiers telle que  $a_0 \geq 2$ . Démontrer que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{a_0 \cdots a_k}$$

est convergente de limite inférieure ou égale à  $\frac{1}{a_0 - 1}$ .

**Si  $x$  désigne la limite de la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  on dit que  $x$  admet un développement en série de Engel.**

On notera  $x = [a_0, \dots, a_n, \dots]$ .

2. Soit  $x \in ]0; 1[$ . On définit deux suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant  $x_0 = x$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 1 + E\left(\frac{1}{x_n}\right) \quad \text{et} \quad x_{n+1} = a_n x_n - 1 \quad \text{où } E \text{ désigne la fonction partie entière.}$$

- a. Démontrer que les suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont bien définies.

- b. Démontrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.  
 c. Démontrer que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et que  $a_0 \geq 2$ .  
 d. En reprenant les notations de la question 1, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x = S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n}$$

En déduire que  $x$  admet un développement en série de Engel.

3. On suppose qu'il existe deux suites distinctes croissantes d'entiers  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $a_0 \geq 2, b_0 \geq 2$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [a_0, \dots, a_n, \dots] = [b_0, \dots, b_n, \dots]$$

On pose  $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\}$

- a. Démontrer que  $[a_{n_0}, \dots, a_n, \dots] = [b_{n_0}, \dots, b_n, \dots]$ .  
 b. Démontrer que si  $x = [a_{n_0}, \dots, a_n, \dots]$  alors  $a_0 x - 1 \leq x$  et en déduire que  $a_0 = 1 + E\left(\frac{1}{x}\right)$ .  
 c. En déduire l'unicité du développement en série de Engel d'un réel donné dans l'intervalle  $]0; 1[$ .  
 4. Déterminer le réel dont le développement en série de Engel est associé à :  
 a. une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  constante égale à  $c$  ( $c \geq 2$ ).  
 b. la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n + 2$ .  
 c. la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (2n + 1)(2n + 2)$ .  
 5. Déterminer le développement en série de Engel du nombre  $\text{ch}(\sqrt{2}) - 2$ .  
 6. Démontrer que  $x \in ]0; 1[$  est rationnel si et seulement si la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de son développement en série de Engel est stationnaire.  
 Pour le sens direct, on pourra commencer par procéder à la division euclidienne du dénominateur de  $x$  par son numérateur.

---

## Problème 2 : statistiques et probabilités

---

### Partie A : deux indicateurs de dispersion

*En 1801, un astronome italien, Piazzi découvre une nouvelle planète Cérès, qu'il perd bientôt de vue. Le problème posé alors aux scientifiques est le suivant : comment, à partir d'une série de résultats d'observations effectuées par différents astronomes, choisir une valeur qui se rapproche le plus possible de la « vraie position » et prédire ainsi le futur passage de Cérès. Deux options s'affrontent : celle de Laplace, qui propose de minimiser les valeurs absolues des écarts et celle de Gauss et Legendre, qui proposent de minimiser les carrés des écarts.*

Dans cette partie,  $n$  désigne un entier naturel non nul et  $(x_1, \dots, x_n)$ , un  $n$ -uplet de réels. On définit sur  $\mathbb{R}$  les deux fonctions  $G$  et  $L$  par :

$$G(X) = \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2$$

$$L(x) = \sum_{i=1}^n |x - x_i|$$

**1. Minimisation de  $G$** 

- En écrivant  $G(x)$  sous la forme d'un trinôme du second degré, démontrer que la fonction  $G$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}$  et indiquer pour quelle valeur de  $x$  il est atteint.
- Que représente d'un point de vue statistique la valeur de  $x$  trouvée à la question 1 b?

**2. Minimisation de  $L$** 

On supposera dans cette question que la série est ordonnée, c'est-à-dire que :  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ .

- Représenter graphiquement la fonction  $L$  dans le cas où :  
 $n = 3, x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 4$
- Représenter graphiquement la fonction  $L$  dans le cas où :  
 $n = 4, x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 7$
- Démontrer que la fonction  $L$  admet un minimum  $m$  sur  $\mathbb{R}$  et indiquer pour quelle(s) valeur(s) de  $x$  il est atteint.  
On distinguera les cas  $n$  pair et  $n$  impair.
- Que représentent d'un point de vue statistique les valeurs de  $x$  trouvées à la question 2. c.?

*Le 7 décembre 1801, Cérès sera observée à l'endroit prévu par les calculs de Gauss. Il prolongera ce travail en établissant, grâce à la théorie des probabilités, que la répartition des erreurs suit une loi normale.*

**Partie B : théorie de l'information, le cas discret**

*La théorie de l'information est un modèle mathématique créé par Claude Shannon en 1948, qui vise à quantifier mathématiquement la notion d'incertitude. Elle a depuis connu des développements aussi bien en statistique qu'en physique théorique ou en théorie du codage.*

On se place dans cette partie dans un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Étant donné un entier naturel non nul  $n$ , on considère un système complet d'évènements  $A = \{A_1, \dots, A_n\}$  de probabilités respectives  $(p_1, \dots, p_n)$  toutes non nulles.

On définit l'entropie de ce système par le nombre :

$$H(A) = - \sum_{k=1}^n p_k \ln p_k$$

Ce nombre quantifie l'incertitude, tandis que son opposé quantifie la quantité d'information. L'entropie doit être maximale lorsqu'aucune hypothèse ne peut être privilégiée.

**1. Deux exemples**

On se place ici dans le cas  $n = 4$ .

Quatre chevaux sont au départ d'une course, et on note  $A_i$  l'évènement : *Le cheval numéro  $i$  remporte la course.* Calculer dans chacun des cas suivants l'entropie du système.

- $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$

**b.**  $p_1 = \frac{1}{8}, p_2 = \frac{1}{8}, p_3 = \frac{1}{4}, p_4 = \frac{1}{2}$

On va à présent établir la propriété générale suivante :

l'entropie est maximale lorsqu'aucune hypothèse ne peut être privilégiée, c'est-à-dire lorsqu'il y a équiprobabilité.

**2. Cas  $n = 2$**

On considère un système complet  $A = \{A_1, A_2\}$ .

On pose  $p_1 = p$  et  $p_2 = 1 - p$ .

Démontrer que l'entropie est maximale lorsque les deux événements  $A_1$  et  $A_2$  sont équiprobables.

**3. Cas général**

**a. Un résultat préliminaire : l'inégalité de Jensen**

Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle  $I$ . On dit que  $f$  est convexe sur  $I$  si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0; 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

On considère une fonction  $f$  convexe sur  $I$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ ,  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$  avec

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$$

Démontrer que :

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

On pourra procéder par récurrence sur  $n$ , en remarquant que si  $\lambda_n \neq 1$  :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \lambda_n x_n + (1 - \lambda_n) \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_n} x_k\right)$$

**b.** On admet le théorème suivant :

si  $f$  est deux fois dérivable sur  $I$ ,  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si  $f''$  est positive sur  $I$ .

Démontrer que la fonction  $x \mapsto x \ln x$  est convexe sur  $]0; 1[$ .

**c.** Démontrer que  $H(A) \leq \ln n$ . Conclure.

**Partie C : théorie de l'information, le cas continu**

Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . On rappelle que  $f$  est une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$  si  $f$  est positive, intégrable sur  $\mathbb{R}$ , et que  $\int_{\mathbb{R}} f = 1$

Lorsqu'en plus  $f \ln f$  est intégrable, on définit l'entropie associée à  $f$  par :

$$H(f) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln(f(x)) dx$$

On désigne par  $\mathcal{H}$  l'ensemble des densités de probabilités qui possèdent une entropie. Le but de cette partie est de déterminer quelle densité maximise l'entropie, c'est-à-dire correspond à la quantité minimale d'information.

### 1. Deux exemples

On admet que les deux fonctions suivantes sont des densités de probabilité. Calculer l'entropie associée à chacune d'elles.

a.  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ .

b.  $h$  définie par  $h(t) = \lambda e^{-\lambda t}$  si  $t \geq 0$ ,  $h(t) = 0$  sinon, où  $\lambda$  est un réel strictement positif.

### 2. Deux résultats préliminaires

a. Démontrer que pour tous réels strictement positifs  $x$  et  $y$  :

$$x \ln y \leq x \ln x + y - x \quad \text{et} \quad x \ln y = x \ln x + y - x \iff x = y$$

b. Soit  $f$  une fonction continue et positive sur un intervalle  $[a ; b]$ , avec  $a < b$ . Démontrer que :

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \implies \forall x \in [a ; b], f(x) = 0$$

On pourra procéder par contraposition.

### 3. Une maximisation d'entropie sous contrainte de moyenne et de variance

On s'intéresse dans cette question aux fonctions de  $\mathcal{H}$  d'espérance nulle et de variance égale à 1, c'est-à-dire telles que :

- $t \mapsto t f(t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  d'intégrale nulle
- $t \mapsto t^2 f(t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  d'intégrale égale à 1.

On appelle  $\mathcal{N}$  cet ensemble.

a. Démontrer que  $g \in \mathcal{N}$ , où  $g$  désigne la fonction définie à la question 1. a.

b. Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{N}$ . Démontrer que :

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln(g(x)) dx = H(g)$$

c. En utilisant les résultats de la question 2, démontrer que :

- $H(f) \leq H(g)$
- $H(f) = H(g) \iff f = g$