

CAPES épreuve 2 session 2013

DEUXIÈME COMPOSITION

Problème 1 : Puissances de matrices

Rappels et notations

Étant donnés deux entiers naturels non nuls p et q , $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes, à coefficients complexes.

L'ensemble $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{C})$ est noté $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et I_p désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

On identifiera par la suite $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et \mathbb{C}^p .

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Pour tout entier n , on note

$$A_n = (a_{ij}(n))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$$

On dit que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, si pour tout couple (i, j) tel que $i \in [1, p]$ et $j \in [1, q]$, la suite $(a_{ij}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{C} .

En posant $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{i,j}(n)) = l_{i,j}$ et $L = (l_{i,j})$, on dit alors que la matrice L est la limite de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on note : $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = L$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Pour tout entier naturel n , on note A^n la puissance n -ième de la matrice A .

Ce problème a pour but de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Partie A : étude d'un exemple

On considère les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + \frac{3}{5}y_n \end{cases}$$

Dans cette partie, on pose $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ en fonction de A^n et de $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.
2. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que A puisse s'écrire :

$$A = PDP^{-1}$$

où P désigne la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de A^n en fonction de n .
4. Établir que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.
5. Démontrer que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et déterminer les limites de ces suites en fonction de x_0 et y_0 .

Partie B : résultats préliminaires

Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

1. Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de matrices de $\mathcal{M}_{p, q}(\mathbb{C})$ qui convergent respectivement vers L et M .
 - a. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n + B_n) = L + M$.
 - b. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (aA_n) = aL$.
 - c. Soient $B \in \mathcal{M}_{p, q}(\mathbb{C})$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes qui converge vers $a \in \mathbb{C}$.
Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n B = aB$.
2. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ qui converge vers L .
 - a. Soit $X \in \mathcal{M}_{p, q}(\mathbb{C})$. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n X = LX$.
 - b. Énoncer sans démonstration un résultat analogue pour la multiplication à droite.
3. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall X \in \mathbb{C}^p, \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n X = 0$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 0$.

Partie C : condition nécessaire

Dans la suite du problème, on note u l'endomorphisme de \mathbb{C}^p représenté par la matrice A dans la base canonique.

On définit, pour tout entier naturel n , u_n par :

$$u_0 = \text{Id}_{\mathbb{C}^p} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u \circ u^n.$$

On suppose dans cette partie que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

1. Soit λ une valeur propre de u ($u \in \mathbb{C}$).
 - a. Montrer que $|\lambda| \leq 1$.
 - b. On suppose que $|\lambda| = 1$.
Montrer qu'alors $\lambda = 1$. On pourra considérer $|\lambda^{n+1} - \lambda^n|$.
2. Montrer que $\text{Ker}(u - \text{Id}) \cap \text{Im}(u - \text{Id}) = \{0\}$.

Partie D : condition suffisante

On note $\chi_u(X) = \det(A - XI_p)$ le polynôme caractéristique de u , où \det désigne le déterminant de la matrice considérée.

1. Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss.
2. En déduire que l'on peut écrire $\chi_u(X) = \det(A - XI_p) = \prod_{i=1}^p (\alpha_i - X)$, avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$ pour tout entier $i \in [1, p]$.
3. Justifier le fait que u admet dans une certaine base (e_1, \dots, e_p) une matrice T de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \dots & \dots & \dots \\ & \alpha_2 & \dots & \dots \\ & & \ddots & \dots \\ 0 & & & \alpha_p \end{pmatrix}$$

4. On suppose dans cette question que $|\alpha_i| < 1$ pour tout entier $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u^n(e_1) = 0$.
 - Montrer par récurrence que pour tout entier $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u^n(e_i) = 0$.
 - En déduire la limite de T^n , puis celle de A^n .
5. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres de u , deux à deux distinctes, avec $m \in \mathbb{N}^*$.
- On suppose dans cette question que $\lambda_1 = 1$ et $|\lambda_i| < 1$ pour tout entier i tel que $2 \leq i \leq m$.
- On suppose également que $\text{Ker}(u - \text{Id}) \cap \text{Im}(u - \text{Id}) = \{0\}$.
- Montrer que $\text{Ker}(u - \text{Id})$ et $\text{Im}(u - \text{Id})$ sont deux sous-espaces supplémentaires dans \mathbb{C}^p stables par u .
 - On note u_1 l'endomorphisme de $\text{Im}(u - \text{Id})$ induit par u .
Montrer que toute valeur propre de u_1 est une valeur propre de u , distincte de λ_1 .
 - En remarquant que u_1 vérifie les hypothèses de la question 4, en déduire que A^n converge et déterminer une matrice semblable à sa limite.

Partie E : conclusion et application

1. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres de A , deux à deux distinctes, avec $m \in \mathbb{N}^*$.
- Déduire des questions précédentes que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad |\lambda_i| < 1 \\ \text{ou} \\ \lambda_1 = 1, \text{Ker}(u - \text{Id}) \cap \text{Im}(u - \text{Id}) = \{0\} \text{ et } \forall i \in \llbracket 2, m \rrbracket, |\lambda_i| < 1 \end{array} \right.$$

2. Déterminer si les suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes, dans chacun des cas suivants :

a. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & \frac{i}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 + \frac{i}{2} & 9 \\ 0 & -4 & 6 + \frac{i}{2} \end{pmatrix}$

 Problème 2 : quelques théorèmes d'arithmétique

On démontre dans la partie A un théorème de Lagrange dont on utilise le résultat pour démontrer le théorème de Wilson (partie B) et le théorème de Wolstenholme (partie C).

Partie A : théorème de Lagrange

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a :

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

2. Montrer que pour tout entier premier p et tout entier $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k}$.
3. Soit p un entier premier impair. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \prod_{k=1}^{p-1} (x+k)$$

- a. Montrer que pour tout réel x on a :

$$pf(x) = (x+1)f(x+1) - xf(x)$$

- b. Justifier l'existence d'un p -uplet d'entiers $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$ tel que pour tout réel x on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^{p-1-k}$$

- c. Montrer que $a_0 = 1$ et $a_{p-1} = (p-1)!$
- d. À l'aide de la question 3 a et en faisant intervenir le binôme de Newton, montrer que pour tout entier $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ on a :

$$pa_k = \sum_{i=0}^k \binom{p-i}{k+1-i} a_i$$

- e. En déduire que $a_1 = \binom{p}{2}$ et que pour tout entier $k \in \llbracket 2, p-1 \rrbracket$ on a :

$$ka_k = \binom{p}{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{p-i}{k+1-i} a_i$$

- f. En déduire le théorème de Lagrange :

« Si p est un entier premier impair et si $f(x) = \prod_{k=1}^{p-1} (x+k) = \sum a_k x^{p-1-k}$

alors les coefficients a_1, a_2, \dots, a_{p-2} sont divisibles par p ».

On pourra raisonner par récurrence.

Partie B : théorème de Wilson

On se propose de démontrer la propriété suivante, connue sous le nom de « théorème de Wilson » : si p est un entier premier alors $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

1. Vérifier que la propriété est vraie pour $p = 2$.
2. p est maintenant un entier premier impair.
 - a. Montrer que :

$$p! = 1 + \sum_{k=1}^{p-2} a_k + (p-1)!$$

(les entiers $(a_i)_{i \in [1, p-2]}$ sont ceux définis à la question A 3 b)

- b. En déduire que $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
3. Montrer que la réciproque du théorème de Wilson est vraie.
4. On se propose d'étudier ce que devient le théorème de Wilson pour les entiers non premiers strictement supérieurs à 4.
 - a. On suppose que $n > 4$ et que la décomposition en produit de facteurs premiers de n comprend au moins deux facteurs premiers distincts. Montrer que $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$.
 - b. On suppose que $n > 4$ et que $n = p^a$ où p est un entier premier et a est un entier strictement supérieur à 2. Montrer que $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$.
 - c. On suppose que $n > 4$ et que $n = p^2$ où p est un entier premier. Montrer que $1 < 2p < n$ et en déduire que $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$.

Partie C : théorème de Wolstenholme

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère le rationnel :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

On désigne par s_n et t_n les deux entiers naturels tels que :

$$H_n = \frac{s_n}{t_n} \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(s_n, t_n) = 1$$

1. Écrire un algorithme permettant d'obtenir pour n allant de 2 à 10 les entiers s_n et t_n (on supposera qu'on dispose d'une instruction $\text{pgcd}(a, b)$ qui renvoie le plus grand commun diviseur de deux entiers a et b).
2. Calculer s_4, s_6 et s_{10} et vérifier que ces entiers sont divisibles respectivement par $5^2, 7^2$ et 11^2 .

Dans la suite, p désigne un nombre premier strictement supérieur à 3.

On se propose de démontrer que l'entier s_{p-1} est divisible par p^2 (théorème de Wolstenholme).

3. Montrer que $H_{p-1} = \frac{a_{p-2}}{(p-1)!}$ où a_{p-2} est défini comme à la partie A. On pourra utiliser une relation liant les racines d'un polynôme et l'un de ses coefficients.
4. Déduire de l'écriture de $f(-p)$ que :

$$a_{p-2} = p^{p-2} - a_1 p^{p-3} + \dots + a_{p-3} p$$

5. Conclure.