

...

## CAPES épreuve 2 session 2014

---

### Problème 1 : matrices d'ordre fini

---

#### Notations et définitions

Dans tout le problème,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1. On désigne par  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (respectivement  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ ) l'ensemble des matrices carrées à  $n$  lignes et  $n$  colonnes dont les coefficients appartiennent à  $\mathbb{C}$  (respectivement à  $\mathbb{R}$ , à  $\mathbb{Z}$ ).

La matrice identité de taille  $n$  est notée  $I_n$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . L'ensemble des valeurs propres de  $A$  est appelé spectre de  $A$  et noté  $Sp(A)$ .

On dit que  $A$  est d'ordre fini s'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$ , tel que  $A^k = I_n$ .

Si  $A$  est d'ordre fini, le plus petit entier strictement positif  $k$  tel que  $A^k = I_n$  est appelé ordre de  $A$  et noté  $o(A)$ .

#### Partie A : préliminaires

1. Cette question consiste en des rappels de théorèmes du cours.
  - a. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose qu'il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $P \neq 0$  tel que  $P(A) = 0$ .
    - i. Donner une condition suffisante sur  $P$  pour que  $A$  soit trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
    - ii. Donner une condition suffisante sur  $P$  pour que  $A$  soit diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
  - b. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On suppose qu'il existe  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $P \neq 0$  tel que  $P(A) = 0$ . Que deviennent les conditions précédentes lorsque l'on s'intéresse à la trigonalisation ou à la diagonalisation de  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ?
2. Soit  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , d'ordre fini. On pose  $o(B) = b$ .
  - a. Démontrer que  $B$  est inversible.
  - b. Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . Démontrer que  $B_k = I_n$  si et seulement si  $b$  divise  $k$ .
  - c. Démontrer que les valeurs propres de  $B$  sont des racines  $b$ -ièmes de l'unité.
  - d. Démontrer que  $B$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
3. Soit  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Ses valeurs propres sont notées  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . On suppose que  $C$  est diagonalisable et que pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n$ ,  $\lambda_i$  est une racine  $n_i$ -ième de l'unité pour un certain entier  $n_i$ . Pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n$ , on note  $k_i$  le plus petit entier strictement positif tel que  $\lambda_i^{k_i} = 1$ .
  - a. Démontrer que  $C$  est d'ordre fini et que son ordre divise le PPCM de  $k_1, \dots, k_n$ .
  - b. Démontrer que  $o(C)$  est le PPCM de  $k_1, \dots, k_n$ .

#### Partie B : matrices d'ordre fini à coefficients réels

Dans cette partie, on considère une matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  d'ordre fini. Le but est de démontrer que cette matrice est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  et de déterminer le spectre de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ .

1. Démontrer que si toutes les valeurs propres de  $A$  dans  $\mathbb{C}$  sont réelles, alors  $Sp(A) \subseteq \{-1; 1\}$ .

2. On suppose que 1 est la seule valeur propre de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ .
- a. Justifier qu'il existe  $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , inversible, et  $a, b, c$  éléments de  $\mathbb{R}$  tels que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b. On pose  $B = P^{-1}AP$ . Démontrer que  $B$  est d'ordre fini.
- c. Démontrer par récurrence que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :  $B^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2}ac + kb \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- d. En déduire que  $A = I_3$ .
3. Énoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque  $-1$  est la seule valeur propre de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ .
4. On suppose que  $-1$  est valeur propre simple de  $A$  et que 1 est valeur propre double de  $A$ .
- a. Justifier qu'il existe  $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , inversible, et  $a, b, c$  éléments de  $\mathbb{R}$  tels que :

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b. On pose  $C = Q^{-1}AQ$ .  
Démontrer qu'il existe trois suites de nombres réels  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telles que pour tout entier naturel  $k$  :

$$C^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 1 & \gamma_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On définira ces suites à l'aide de relations de récurrence.

- c. Donner une expression de  $\gamma_k$  pour tout  $k \leq 0$ .
- d. En déduire que  $c = 0$ .
- e. En déduire que  $C$  et  $A$  sont diagonalisables dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .
5. Énoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque  $-1$  est valeur propre double de  $A$  et 1 est valeur propre simple de  $A$ .
6. On suppose que  $A$  admet dans  $\mathbb{C}$  au moins une valeur propre non réelle.
- a. Démontrer qu'il existe  $\theta \in 2\pi\mathbb{Q} \setminus \pi\mathbb{Z}$ , tel que  $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$  ou  $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$ .  
On pourra considérer le polynôme caractéristique de  $A$ .
- b. Démontrer que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .
7. Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Démontrer que  $A$  est d'ordre fini si, et seulement si,  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  et qu'il existe  $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$  tel que  $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$  ou  $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$ .

### Partie C : matrices d'ordre fini à coefficients entiers

Soit  $A \in M_3(\mathbb{Z})$ , d'ordre fini. D'après la partie B, son spectre dans  $\mathbb{C}$  est de la forme  $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$  ou  $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$ , où  $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$ .

- Démontrer que  $2 \cos \theta \in \mathbb{Z}$ .  
On pourra considérer la trace de  $A$ .
- Donner les valeurs possibles pour  $\theta$ .

- 
3. Donner les différents spectres dans  $\mathbb{C}$  possibles pour  $A$  puis démontrer que  $o(A) \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6\}$ .
4. On cherche maintenant à construire des matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$  de chaque ordre.
- a. Donner des matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$  d'ordre 1 et 2.
- b. i. Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Calculer le polynôme caractéristique de :  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \end{pmatrix}$ .
- ii. Construire une matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$  dont les valeurs propres sont  $1, e^{\frac{2i\pi}{3}}$  et  $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ .  
Démontrer que cette matrice est d'ordre 3.
- iii. Construire des matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$  d'ordre 4 et d'ordre 6.

Tournez la page S.V.P.

---

## Problème 2 : décimales des nombres rationnels

---

### Notations et définitions

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}$  et  $\mathbb{Q}$  désignent respectivement l'ensemble des nombres entiers naturels, celui des nombres entiers relatifs, celui des nombres décimaux et celui des nombres rationnels.

Un nombre réel  $x$  est dit décimal s'il existe un entier  $n$  tel que  $10^n x \in \mathbb{Z}$ .

On dit qu'une suite d'entiers naturels  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décimale si, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $0 \leq d_n \leq 9$ , le premier terme  $d_0$  étant un entier naturel quelconque.

Une suite décimale est dite finie si tous ses termes sont nuls à partir d'un certain rang.

Elle est dite :

- *impropre* si tous ses termes sont égaux à 9 à partir d'un certain rang ;
- *propre* dans le cas contraire du précédent.

On définit pour tout réel  $x$  la partie entière de  $x$ , notée  $E(x)$ , par la condition :  $E(x)$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ .

Le but de ce problème est de démontrer quelques propriétés des nombres décimaux, puis d'étudier les décimales des nombres rationnels non décimaux.

### Partie A nombres décimaux

1. Démontrer que  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$  et que ces inclusions sont strictes.
2. Démontrer que l'ensemble  $\mathbb{D}$  est stable pour l'addition et la multiplication.
3. Soit  $x$  un nombre rationnel positif. On pose  $x = \frac{a}{b}$  avec  $a$  et  $b$  entiers naturels premiers entre eux et  $b \neq 0$ .
  - a. On suppose qu'il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ , tels que  $b = 2^\alpha \times 5^\beta$ . Démontrer que  $x$  est décimal.
  - b. On suppose que  $x$  est un décimal non entier.  
Démontrer que si  $p$  est un diviseur premier de  $b$ , alors  $p \in \{2; 5\}$ .
  - c. Déduire des questions précédentes une condition nécessaire et suffisante sur  $b$  pour que le rationnel  $x$  soit un nombre décimal.
4. On considère une suite décimale  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - a. Démontrer que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$  est convergente. On note  $x$  sa limite.
  - b. Démontrer que dans les deux cas suivants,  $x$  est un nombre décimal :
    - la suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est finie ;
    - la suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est impropre.
  - c. Démontrer que pour tout entier  $N \geq 0$ , on a  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} \leq \frac{1 + d_N}{10^N}$ , avec égalité si et seulement si, pour tout  $k \geq N + 1$ ,  $d_k = 9$ .
  - d. En déduire que si  $x$  est un réel vérifiant  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$  et si  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décimale propre, alors la suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant cette égalité est unique.  
Si  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$  avec  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite décimale propre, on note alors  $x = d_0 d_1, d_2 \dots d_n \dots$  et on dit que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $d_n$  est la  $n$ -ième décimale du réel  $x$ .
5. Démontrer que pour tout nombre décimal positif  $x$ , il existe une unique suite décimale finie  $(d_n)_{0 \leq n \leq N}$  telle que  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$ .

**Partie B : périodicité des décimales d'un rationnel positif non décimal**

Soit  $x$  un nombre rationnel positif **non décimal**. On pose  $x = \frac{a}{b}$  avec  $a$  et  $b$  entiers naturels premiers entre eux.

On définit par récurrence deux suites d'entiers naturels  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la manière suivante :

- $d_0$  et  $r_0$  sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  ;
- pour tout  $n \geq 0$ ,  $d_{n+1}$  et  $r_{n+1}$  sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de  $10r_n$  par  $b$ .

1. Soit  $N$  un entier tel que  $N \geq 1$ .

a. Écrire un algorithme permettant d'afficher les entiers  $d_n$  et  $r_n$  de  $n = 0$  jusqu'au rang  $N$ .

*On suppose disposer d'une instruction calculant la partie entière  $E(y)$  d'un réel  $y$ .*

b. Donner pour le rationnel  $x = \frac{5}{13}$  les valeurs de  $d_n$  et  $r_n$  jusqu'au rang  $N = 7$ .

2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier  $n$  :  $x = \sum_{k=0}^n \frac{d_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n b}$ .

b. En déduire que, pour tout entier  $n$ ,  $r_n$  est le reste de la division euclidienne de  $10^n a$  par  $b$ .

c. Démontrer que  $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$  et que  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décimale propre.

3. Dans cette question, on va établir que les suites  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont périodiques à partir d'un certain rang.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $r_n \neq 0$ .

b. Démontrer que les nombres  $r_0, r_1, \dots, r_{b-1}$  ne peuvent pas être deux à deux distincts.

c. Soit  $q$  le plus petit indice d'un reste figurant au moins deux fois dans la liste de la question précédente et  $q'$  l'indice du premier autre reste qui lui est égal.

On pose  $p = q' - q$ , de sorte que  $0 \leq q < q + p \leq b - 1$  et  $r_q = r_{q+p}$ .

Démontrer que la suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est périodique de période  $p$  à partir du rang  $q$  et que la suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est périodique de période  $p$  à partir du rang  $q + 1$ .

*Dans la suite, on dit que  $q$  est la pré-période du rationnel  $x$  et  $p$  sa période.*

*On note alors  $x = d_0, d_1, \dots, d_q [d_{q+1} \dots d_{q+p}]$  si  $q \geq 1$  et  $x = d_0, [d_1 \dots d_p]$  si  $q = 0$ .*

4. On conserve dans cette question les notations précédentes.

a. i. Démontrer que parmi les nombres  $10^0, 10^1, \dots, 10^{b-1}$ , au moins deux d'entre eux sont congrus modulo  $b$ .

ii. Démontrer que :

—  $q$  est le plus petit exposant d'un nombre de la liste précédente qui est congru modulo  $b$  à un autre nombre de cette liste ;

—  $q + p$  est l'exposant du premier nombre de cette liste congru à  $10^q$  modulo  $b$  et distinct de  $10^q$ .

b. Démontrer que le rationnel  $x = \frac{a}{b}$  a la même période et la même pré-période que  $\frac{1}{b}$ .

*Dans la suite, lorsque la fraction  $b$  est non décimale,  $q$  et  $p$  seront nommés « la pré-période et la période de l'entier  $b$  ».*

5. Déterminer la pré-période et la période des entiers suivants : 7; 12; 112.

**Partie C : détermination de la pré-période**

On considère un entier  $b$  supérieur ou égal à 2 tel que la fraction  $\frac{1}{b}$  soit non décimale et on note  $\omega(b)$  sa pré-période et  $\pi(b)$  sa période.

1. Dans cette question, on suppose que  $b$  est premier avec 10.
  - a. Démontrer l'équivalence :  $10^q \equiv 10^{q+p}$  modulo  $b \iff 10^p \equiv 1$  modulo  $b$ .
  - b. En déduire que  $\omega(b) = 0$ .
2. Dans cette question, on pose  $b = 2^j \times 5^k \times c$ , où  $c$  est un entier premier avec 10.  
 Démontrer que  $\pi(b) = \pi(c)$  et que  $\omega(b) = \max(j; k)$ .  
*On pourra montrer que :*  
 $10^q (10^p - 1)$  multiple de  $b \iff 10^q$  multiple de  $2^j \times 5^k$  et  $10^p - 1$  multiple de  $c$ .
3. Application : déterminer la période et la pré-période des nombres 150 et 1 120.

**Partie D : détermination de la période**

Dans cette partie, on se propose de déterminer la période des entiers supérieurs ou égaux à 2, qui sont premiers avec 10, en fonction de leur décomposition en facteurs premiers. Si  $b$  est un tel entier, d'après la partie C, sa période  $\pi(b)$  est le plus petit entier  $n$  non nul tel que  $10^n \equiv 1$  modulo  $b$ .

1. Dans cette question,  $b$  est un nombre premier distinct de 2 et 5.
  - a. On note  $\bar{a}$  la classe d'un entier  $a$  dans  $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$  et  $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$  l'ensemble  $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$  privé de 0.  
 Démontrer que l'application  $f : \begin{cases} (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* & \rightarrow (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* \\ \bar{a} & \rightarrow \frac{1}{10 \times \bar{a}} \end{cases}$  est bien définie et injective.
  - b. En utilisant la question précédente, démontrer que :  $10^{b-1} \equiv 1$  modulo  $b$ .
  - c. Démontrer que si  $r$  est le reste de la division euclidienne d'un entier  $n$  par un entier  $m$ , alors  $10^r - 1$  est le reste de la division euclidienne de  $10^n - 1$  par  $10^m - 1$ .  
*On pourra utiliser une forme factorisée de  $x^n - 1$ , où  $x$  désigne un réel quelconque.*
  - d. Déduire des résultats précédents que :
    - si un entier  $k$  vérifie  $10^k \equiv 1$  modulo  $b$ , alors  $\pi(b)$  divise  $k$ ;
    - $\pi(b)$  divise  $b - 1$ .
2. Dans cette question,  $b$  et  $c$  sont deux entiers premiers avec 10 et premiers entre eux.
  - a. Soit  $n$  un entier naturel non nul. Démontrer que  $10^n \equiv 1$  modulo  $bc$  si et seulement si  $n$  est un multiple de  $\pi(b)$  et de  $\pi(c)$ .
  - b. En déduire que  $\pi(bc) = \text{ppcm}(\pi(b), \pi(c))$ .
3. Dans cette question,  $b$  est un entier de la forme  $p^n$ , où  $p$  est un nombre premier distinct de 2 et 5, et  $n$  un entier naturel non nul. On pose  $\pi(b) = \ell$ .
  - a. Justifier l'existence de deux entiers  $q$  et  $r$  tels que  $r \geq 1$  et  $10^\ell - 1 = p^r \times q$ .
  - b. *Premier cas* :  $n \leq r$ . Démontrer que  $\pi(p^n) = \ell$ .

c. *Deuxième cas* :  $n > r$ .

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $k$ , il existe un entier naturel  $Q$  premier avec  $p$  tel que  $10^{\ell \times p^k} - 1 = p^{r+k} \times Q$  et que

$$\pi(p^{r+k}) = \ell \times p^k.$$

En déduire que  $\pi(p^n) = \ell \times p^{n-r}$ .

4. Applications

a. Déterminer la période des entiers  $3, 3^2, 3^3, 3^4, 7, 7^2$  et  $7^3$ .

b. En déduire la période de l'entier 27783.