

∞ CAPES Concours externe Option mathématiques ∞
session 2 avril 2019 Épreuve 2

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations.

\mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels et \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels.

Partie A : logarithme de base a

Rappel. On appelle *logarithme* toute fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$, dérivable, telle que :

- il existe un nombre réel a non nul tel que, pour tout nombre réel x strictement positif,

$$f'(x) = \frac{a}{x}.$$

- $f(1) = 0$.

I. Soit a un nombre réel non nul. Justifier qu'il existe un unique logarithme, que l'on notera f_a , tel que, pour tout nombre réel $x > 0$, $f'_a(x) = \frac{a}{x}$. Lorsque $a = 1$, on utilise la notation \ln (logarithme népérien).

II. Pour tout nombre réel a non nul, exprimer f_a à l'aide de \ln .

III. Montrer que, pour tout nombre réel a non nul, tous nombres réels $x, y > 0$,

$$f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y).$$

Indication : on pourra étudier la fonction définie par $x \mapsto f_a(xy)$.

IV. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$,

$$f_a\left(\frac{1}{x}\right) = -f_a(x).$$

V. Soient x un nombre réel strictement positif et r un nombre rationnel. Montrer que $f_a(x^r) = r f_a(x)$.

Indication : on pourra commencer par le cas où r est un entier naturel, puis celui où r est un entier relatif, avant de conclure dans le cas où r est un nombre rationnel.

VI. Montrer que la fonction \ln est strictement croissante.

VII. Déterminer les limites quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0 de la fonction \ln .

VIII. Montrer que la fonction \ln est une bijection de $]0 ; +\infty[$ sur \mathbb{R} .

IX. Comment peut-on généraliser les résultats des questions **VI.** et **VIII.** au cas des logarithmes f_a ?

Partie B : logarithme décimal

X. Montrer qu'il existe un unique logarithme f_a tel que $f_a(10) = 1$. Ce logarithme est noté Log et est appelé logarithme décimal.

XI. Soit N un nombre entier naturel dont l'écriture en base dix possède n chiffres. Déterminer la partie entière de $\text{Log}(N)$.

XII. Les exercices suivants sont proposés à une classe de terminale scientifique :

1. Combien le nombre 4^{2019} possède-t-il de chiffres ?
2. Le niveau sonore L (en dB) s'exprime en fonction de l'intensité I (en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$) selon la formule

$$L = 10\text{Log} \left(\frac{I}{I_0} \right),$$

où $I_0 = 10^{-12} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ correspond à l'intensité sonore minimale à laquelle l'oreille est sensible pour un son de fréquence 1 000 Hz.

- a. Calculer le niveau sonore correspondant à une intensité sonore de $10^{-5} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$.
- b. Quel est l'effet sur l'intensité sonore d'une augmentation du niveau sonore de 10 dB ?
- c. Une balle lancée d'une hauteur de 2 m atteint après chaque rebond 70 % de sa hauteur précédente et cesse de rebondir quand sa hauteur n'excède pas 1 mm.
Au bout de combien de rebonds cela se produira-t-il ?

Pour chacun de ces trois exercices, présentez une rédaction de la solution, telle que vous l'exposeriez à une classe de terminale scientifique.

Partie C : calcul approché de valeurs du logarithme népérien

XIII. Montrer que pour tout nombre réel $x \neq -1$ et tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}.$$

XIV. En déduire que pour tout nombre réel $x > -1$ et tout entier $n \geq 1$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} dt.$$

XV. On suppose que $x \geq 0$. Montrer que

$$\left| \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

XVI. On suppose que $-1 < x \leq 0$. Montrer que

$$\left| \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \frac{1}{1+x} \times \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

XVII.

En déduire que, si $-1 < x \leq 1$, la série de terme général $(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est convergente et que sa somme vaut $\ln(1+x)$. On pourra raisonner par disjonction de cas.

XVIII. Justifier que la série de terme général $(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ diverge lorsque $|x| > 1$.

XIX. À l'aide d'une calculatrice, déterminer une valeur de n pour laquelle $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ est une valeur approchée de $\ln(1+x)$ à 10^{-8} près pour :

1. $x = \frac{1}{3}$.
2. $x = \frac{1}{8}$.
3. $x = 1$.

XX.

1. Justifier que

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

2. Soit p un entier naturel non nul. On considère $R_p = \sum_{k=2p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que

$$R_p = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=p}^N \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=p}^N \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}.$$

3. Soit N un entier naturel non nul. Montrer que si $0 < p \leq N$,

$$\sum_{k=p}^N \frac{1}{(2k+2)^2} \leq \sum_{k=p}^N \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leq \sum_{k=p}^N \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

4. Soit a un nombre réel strictement positif. Montrer que si $0 < p \leq N$,

$$\int_p^{N+1} \frac{1}{(2x+a)^2} dx \leq \sum_{k=p}^N \frac{1}{(2k+a)^2} \leq \int_{p-1}^N \frac{1}{(2k+a)^2} dx.$$

5. En déduire que pour tout entier naturel non nul p ,

$$\frac{1}{4p+4} \leq R_p \leq \frac{1}{4p-2}.$$

6. Montrer que R_p est équivalent à $\frac{1}{4p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.

XXI. On se propose de calculer des approximation de $\ln(2)$ et $\ln(3)$.

1. Exprimer $\ln(2)$ et $\ln(3)$ à l'aide de $\ln\left(1 + \frac{1}{3}\right)$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{8}\right)$.
2. Les calculs de la question **XIX.** ont donné les valeurs approchées à 10^{-8} près suivantes :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) \approx 0,28768207 \quad \ln\left(1 + \frac{1}{8}\right) \approx 0,11778304.$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(2)$ et $\ln(3)$. Donner la précision de ces résultats.

XXII. Montrer que pour tout $x \in]-1 ; 1[$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt.$$

XXIII. En déduire que si $x \in [0 ; 1[$, alors

$$\left| \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leq \frac{1}{1-x^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

XXIV.

1. Quelle valeur de x doit-on choisir pour déduire de la question précédente une valeur approchée de $\ln(2)$? de $\ln(3)$?
2. À l'aide de ces valeurs de x , donner une valeur de n permettant d'obtenir des valeurs approchées de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ à 10^{-8} près.
3. Comparer cette méthode d'approximation de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ avec celle de la question **XXI.**

XXV. On se propose de calculer des valeurs approchées de $\ln(n)$ pour tout nombre entier $n > 1$.

1. Expliquer pourquoi il suffit de calculer des valeurs de $\ln(p)$ pour p nombre premier.
2. Décrire une méthode pour calculer des valeurs approchées de $\ln(p)$ pour tout entier n tel que $2 \leq n \leq 20$.

Problème n° 2

Notations.

\mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels, \mathbb{Z} l'ensemble des nombres relatifs et \mathbb{Q} l'ensemble des nombres rationnels. L'ensemble des nombres rationnels positifs ou nuls est noté \mathbb{Q}^+ .

Pour m et n deux entiers naturels, $\llbracket m, n \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leq k \leq n$.

On rappelle que, pour tout élément x non nul de \mathbb{Q}^+ , il existe un unique couple (a, b) d'entiers naturels premiers entre eux tel que $x = \frac{a}{b}$. Le quotient $\frac{a}{b}$ est la forme fractionnaire irréductible (en abrégé, FFI) de x . Par convention, la forme fractionnaire irréductible de 0 est $\frac{0}{1}$.

Partie A : Somme des cancre

Définition. Soient x et y deux éléments de \mathbb{Q}^+ . Leur FFI respectives sont notées $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ (a, b, c, d sont des entiers naturels, b et d sont non nuls, a et b sont premiers entre eux, c et d sont premiers entre eux). La somme des cancre de x et y est définie par :

$$x \oplus y = \frac{a+c}{b+d}.$$

I. Question de cours. Soient a, b, n trois entiers relatifs, a et b étant non nuls. Montrer que $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a, b + na)$.

II. Soient x et y deux rationnels positifs.

1. Montrer que $x \oplus y$ est un rationnel positif.

2. On note $\frac{a}{b}$ la FFI de x et $\frac{c}{d}$ la FFI de y . La FFI de $x \oplus y$ est-elle toujours $\frac{a+c}{b+d}$?

III. Chacune des affirmations suivantes est soit vraie soit fausse. Préciser pour chacune ce qu'il en est, en justifiant la réponse.

1. Pour tout $x \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus 0 = x$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus x = x$.

3. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus y = y \oplus x$.

4. Pour tous $x, y, z \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$.

5. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls, $\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y} = \frac{1}{x \oplus y}$.

6. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$, pour tout entier naturel n , $(n+x) \oplus (n+y) = n + (x \oplus y)$.

IV. Soit x et y deux éléments de \mathbb{Q}^+ .

1. Montrer que $x \oplus y = x$ si, et seulement si, $x = y$.

2. Montrer que si $x < y$, alors $x < x \oplus y < y$.

V. Interprétation géométrique.

On se place dans un plan euclidien, muni d'un repère (O, I, J) . Pour $x \in \mathbb{Q}^+$, de FFI $\frac{a}{b}$ on note M_x le point de coordonnées $(b; a)$.

1. Soient $x, y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls. Montrer que $O, M_{x \oplus y}$ et le milieu de $[M_x M_y]$ sont alignés.

2. Qu'est la droite $(OM_{x \oplus y})$ pour le triangle $OM_x M_y$?

VI. Soient $x, y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls, de FFI respectives $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. On suppose que $a > c$ et $b < d$.

En utilisant l'aire de rectangles et de triangles rectangles, montrer que l'aire du triangle $OM_x M_y$ est

$$\frac{ad - bc}{2}.$$

Partie B : suites de Farey

Définition : pour tout entier $n \geq 1$, la suite de Farey d'ordre n est la suite dont les termes sont, rangés dans l'ordre croissant, tous les rationnels positifs compris entre 0 et 1 dont la FFI a un dénominateur inférieur ou égal à n . On note F_n cette suite. Par exemple :

$$\begin{aligned} F_1 &= \left(\frac{0}{1}; \frac{1}{1} \right) \\ F_2 &= \left(\frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{1} \right) \\ F_3 &= \left(\frac{0}{1}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{1} \right) \end{aligned} .$$

VII. Déterminer F_4, F_5 et F_6 .

VIII. Soit $x \in \mathbb{Q}^+$ et soit n un entier naturel non nul. Montrer que x est un terme de la suite F_n si, et seulement si, il existe $a, b \in \mathbb{N}$, b non nul, tels que $x = \frac{a}{b}$ et $0 \leq a \leq b \leq n$.

IX. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que les termes de F_n sont aussi des termes de F_{n+1} .

X. Montrer que si x est un terme de la suite F_n alors $1 - x$ également.

XI. On considère l'application suivante :

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{Q}^+ & \rightarrow & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ x & \mapsto & (a, b) \text{ tel que } \frac{a}{b} \text{ est la FFI de } x. \end{cases}$$

1. Montrer que θ est injective.

2. Montrer que θ n'est pas surjective.

Indication : on pourra montrer que $(2; 2)$ n'appartient pas à $\theta(\mathbb{Q}^+)$.

3. Soit x un élément de la suite F_n , non nul. Montrer que $\theta(x) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$.

4. On note f_n le nombre de termes de F_n . Montrer que $f_n \leq n^2 + 1$ et que l'égalité n'est satisfaite que si $n = 1$.

XII. Soit n un entier naturel non nul. L'indicatrice d'Euler de n est l'entier défini par

$$\varphi(n) = \text{card}(\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{PGCD}(k, n) = 1\}).$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$f_n = 1 + \sum_{k=1}^n \varphi(k).$$

Partie C : éléments consécutifs des suites de Farey

XIII. Soit n un entier naturel non nul et soient x et y deux termes consécutifs de la suite F_{n+1} . On suppose qu'aucun des deux n'est un terme de F_n .

1. Montrer qu'il existe $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $x = \frac{k}{n+1}$ et $y = \frac{k+1}{n+1}$.

2. Montrer que $x < \frac{k}{n} < y$.

3. Montrer que si x et y sont deux termes consécutifs de la suite F_{n+1} , alors au moins l'un des deux est un élément de F_n .

XIV. Le but de cette question est de démontrer, pour tout entier $n \geq 1$, la propriété (P_n) :

« si x et y sont, dans cet ordre, deux termes consécutifs de la suite de Farey F_n , dont les FFI respectives sont $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, alors $bc - ad = 1$ et $x \oplus y$ est la première fraction qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey d'ordre m strictement supérieur à n . »

1. Démontrer (P_1) .

2. On suppose que, pour un certain entier $n \geq 1$, la propriété (P_n) est vraie. Soit alors x et y deux termes consécutifs (dans cet ordre) de F_{n+1} dont les FFI respectives sont $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. On rappelle que, dans ce cas, x ou y est un élément de F_n .

a. Montrer que si x et y sont des éléments de F_n , alors $bc - ad = 1$ et $x \oplus y$ est la première fraction qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey d'ordre strictement supérieur à $n + 1$.

b. On suppose dans tout ce qui suit que x est un terme de F_n et que y n'est pas un terme de F_n . Soit z le successeur de x dans F_n et $z = \frac{r}{s}$ la FFI de z .

Montrer que $\frac{a+r}{b+s}$ est une fraction irréductible comprise entre x et z .

- c. Montrer que $x < y < z$ puis que $y = x \oplus z$.
- d. En déduire que $c = a + r$ et $d = b + s$.
- e. Déduire que $bc - ad = rd - sc = 1$.
- f. Soit $\frac{p}{q}$ la première fraction irréductible qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey F_m d'ordre m strictement supérieur à $n + 1$. On pose $u = qc - pd$ et $v = pb - aq$. Montrer que u et v sont des entiers naturels non nuls et que

$$\begin{cases} au + cv = p, \\ bu + dv = q. \end{cases}$$

- g. Déduire que $x \oplus y$ apparaît dans une suite $F_{m'}$ avec $n + 1 < m' \leq m$ et que

$$x < x \oplus y < y.$$

- h. En déduire que $x \oplus y = \frac{p}{q}$.

3. Conclure.

XV. Applications

- Montrer que si b et d sont les FFI de deux termes successifs d'une suite de Farey F_n , alors $\frac{a+c}{b+d}$ est une fraction irréductible.
- Soient x, y et z trois termes consécutifs d'une suite de Farey F_n de FFI respectives sont $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{c}{f}$. Montrer que $bc - ad = de - fc$ puis que $y = x \oplus z$.