

Problème 1 : codage et décodage d'un message chiffré

Partie A : équation diophantienne

Dans cette partie, on considère l'équation diophantienne

$$(E): 17x - 26y = 1$$

d'inconnue $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Déterminer une solution particulière de (E) .
2. Résoudre l'équation (E) .
3. Démontrer qu'il existe un unique couple solution $(u; v)$ de (E) tel que $0 \leq u < 26$.
4. Démontrer que, pour tous nombres entiers relatifs p et q , on a l'équivalence :

$$17p \equiv q \pmod{26} \iff p \equiv 23q \pmod{26}.$$

Codage :

Soient a un entier non nul et b un entier.

La fonction f , qui à tout entier n compris entre 0 et 25 associe $f(n) = an + b$ est appelée fonction de codage.

Le codage d'une lettre par cette fonction se fait comme suit :

- Remplacer la lettre par son équivalent numérique n donné par le tableau ci-dessous
- Calculer le reste r de la division euclidienne de $f(n) = an + b$ par 26
- Remplacer l'entier obtenu r par la lettre correspondante dans le tableau

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Le codage d'un mot consiste alors à coder chacune de ses lettres.

Partie B : : un exemple de codage

Dans cette partie, la fonction de codage f est définie par $f(n) = 17n + 22$ où n est un entier compris entre 0 et 25.

Pour le codage de la lettre H, correspondant au nombre $n = 7$, on a :

$$f(7) = 17 \times 7 + 22 = 141 = 5 \times 26 + 11, \text{ d'où } r = 11.$$

Ainsi la lettre H sera codée par la lettre L, correspondant au nombre 11.

1. Coder le mot « HUIT » en utilisant la fonction f .
2. a. Déterminer l'expression d'une fonction de décodage g telle que :

$$r \equiv f(n) \pmod{26} \iff n \equiv g(r) \pmod{26}$$

- b. Décoder alors le mot « QWXA ».

Partie C : cas général

Soient a un entier non nul et b un entier.

Dans cette partie, la fonction de codage est définie par $f(n) = an + b$, pour tout entier n compris entre 0 et 25.

On dit que f admet une fonction de décodage g , si deux lettres distinctes sont codées par des lettres distinctes, c'est-à-dire si :

pour tout couple d'entiers $(n_1 ; n_2)$ compris entre 0 et 25, $f(n_1) \equiv f(n_2) \pmod{26} \Rightarrow n_1 = n_2$.

On admet qu'il existe alors une fonction affine de décodage g , définie pour tout entier r par $g(r) = n$ où n un entier tel que $f(n) \equiv r \pmod{26}$.

1. Démontrer que si a et 26 sont premiers entre eux alors f admet une fonction de décodage.
2. Soit une fonction de codage f telle que a et 26 sont premiers entre eux.
 - a. Démontrer qu'il existe un entier relatif u tel que $au \equiv 1 \pmod{26}$
 - b. Déterminer en fonction de u une fonction de décodage g .
 - c. La fonction de décodage est-elle unique?

Problème 2 : géométrie dans l'espace

Soit ABCDEFGH un cube de côté 4.

On note I le milieu du segment [CG] et J celui du segment [GH].

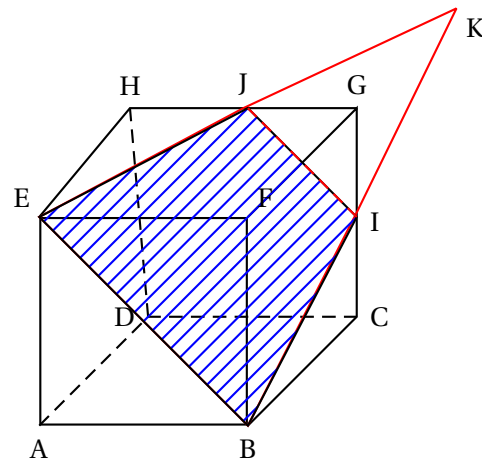
On admet que les droites (BI) et (EJ) sont sécantes en un point K.

Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j})$ avec :

$\vec{i} = \frac{1}{4}\vec{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{4}\vec{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{4}\vec{AE}$. On a ainsi :

A(0; 0; 0), B(4; 0; 0), C(4; 4; 0), D(0; 4; 0),

E(0; 0; 4), F(4; 0; 4), G(4; 4; 4) et H(0; 4; 4).



1. a. Vérifier par le calcul que I a pour coordonnées (4; 4; 2).
On admettra que le point J a pour coordonnées (2; 4; 4).

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (BI).

On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (EJ) est :

$$\begin{cases} x = 2s \\ y = 4s \\ z = 4 \end{cases}, \text{ où } s \in \mathbb{R}.$$

c. Démontrer que K a pour coordonnées (4; 8; 4).

d. En exprimant le produit scalaire $\overrightarrow{KE} \cdot \overrightarrow{KB}$ de deux façons différentes, déterminer, au degré près, une mesure de l'angle géométrique \widehat{EKB} .

2. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BIJ).

b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BIJ) est :

$$2x - y + 2z - 8 = 0.$$

3. On note Δ la droite orthogonale au plan (BIJ) passant par le point D, et N le point d'intersection de Δ avec le plan (BIJ).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

b. Démontrer que le point N a pour coordonnées $\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

c. Calculer la distance du point D au plan (BIJ).

4. Soit M un point mobile sur le segment [EJ], et soit s le réel de l'intervalle $[0; 1]$ tel que $\overrightarrow{EM} = s\overrightarrow{EJ}$.

a. Démontrer que $DM^2 = 20s^2 - 32s + 32$.

Déterminer la valeur du paramètre s qui rend la distance DM minimale.

b. Déterminer les coordonnées du point M qui réalise cette condition.

Problème 3 : fonctions

On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}.$$

On suppose que f est dérivable sur \mathbb{R} et l'on note f' sa dérivée.

Partie A : la représentation graphique

Une représentation graphique (\mathcal{C}) de la fonction f est donnée ci-après mais les graduations ne sont pas indiquées.

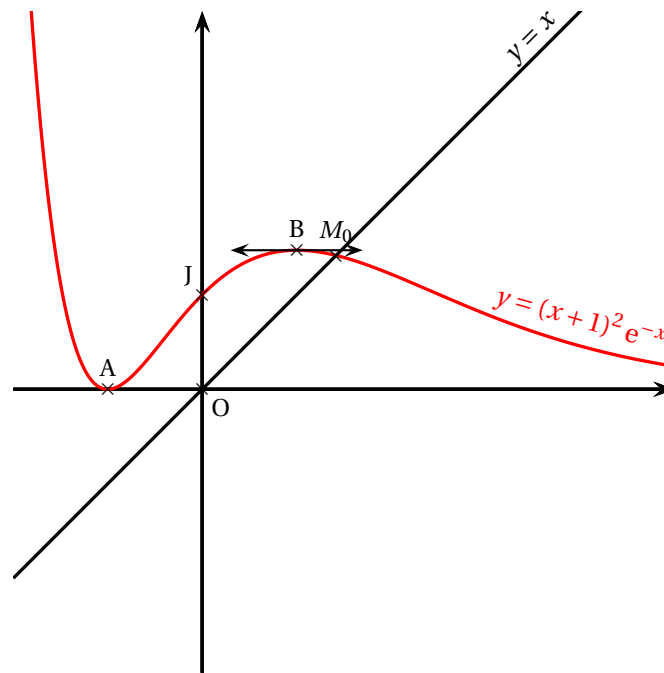
On se propose dans cette partie de préciser cette représentation graphique.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer $f'(x)$.

2. Démontrer que la fonction f est décroissante sur $[1; +\infty[$.

3. Soit B le point de (\mathcal{C}) d'abscisse positive tel que la tangente en B à (\mathcal{C}) est parallèle à l'axe des abscisses.

a. Déterminer les coordonnées de B.



- b. En déduire l'équation de la tangente à (\mathcal{C}) en B.
- 4. La courbe coupe l'axe des ordonnées au point J.
 - a. Déterminer les coordonnées de J.
 - b. La tangente (Δ) à la courbe (\mathcal{C}) au point J passe-t-elle par le point A de coordonnées $(-1 ; 0)$?
 - c. (T) est-elle parallèle à la droite (Δ) d'équation $y = x$?
- 5. La courbe (\mathcal{C}) admet-elle une asymptote en $+\infty$?

Partie B : recherche de l'intersection de la courbe (\mathcal{C}) avec la droite (Δ) .

On désigne par x_0 l'abscisse du point d'intersection de la courbe (\mathcal{C}) avec la droite (Δ) .
 On admet dans cette partie que $1 < x_0 < 2$

- 1. Donner une valeur arrondie, à 10^{-2} près, de $f(1)$ puis de $f\left(\frac{3}{2}\right)$.
- 2. On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 &= \frac{3}{2} \\ u_{n+1} &= f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

À l'aide des questions précédentes, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, 1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$.

- 3. On admet que pour tout entier naturel $n, |u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2} |u_n - x_0|$.
 - a. Démontrer que $|u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

- b. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. a. En utilisant la décroissance de f sur $\left[1; \frac{3}{2}\right]$, justifier que pour tout entier naturel n , $u_n - x_0$ et $u_{n+1} - x_0$ sont de signes contraires.
- b. Écrire un algorithme permettant d'obtenir, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite du rang 0 au rang $n - 1$.
- c. Calculer les cinq premiers termes de la suite et en donner une valeur arrondie à 10^{-5} près.
- d. En déduire une valeur approchée de x_0 .

Partie C : un calcul d'aire

Soit a un nombre négatif.

1. À l'aide de deux intégrations par partie, calculer en fonction de α :

$$\int_{\alpha}^0 f(x) dx.$$

On désigne par \mathcal{A} l'aire, exprimée en cm^2 , de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.

2. Déterminer la valeur exacte de \mathcal{A} quand $\alpha = -1$.
3. On se propose de déterminer une valeur approchée de α tel que $\mathcal{A} = 5$.
- a. Vérifier que $\mathcal{A} = 5$ est équivalent à $e^{-\alpha} (\alpha^2 + 4\alpha + 5) = 10$.
- b. Démontrer que l'équation $e^{-\alpha} (x^2 + 4x + 5) = 10$ admet une unique solution sur \mathbb{R} .
- c. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α tel que $\mathcal{A} = 5$.