CAPES À AFFECTATION LOCALE À MAYOTTE

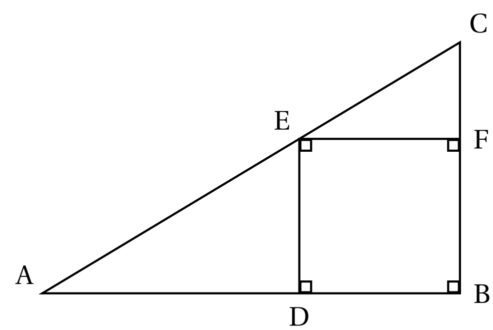
Section mathématiques

9 avril 2025 épreuve 2

Problème 1 : Vrai –Faux

Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Proposition** : L'inverse d'un nombre décimal est un nombre décimal.
2. **Proposition** : Le volume d'un cylindre est proportionnel à son rayon.
3. **Proposition** : L'inverse de $\sqrt{2}-1$ est $\sqrt{2}+1$.
4. **Proposition** : Les réels x vérifiant $\dfrac{1}{9} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{4}$ sont les réels de l'intervalle $[2\,;\,3]$.
5. **Proposition** : Pour tout réel x, on a $-x \leqslant x^2$.
6. Soit ABCD un carré.
   M est un point du côté [AB] et N un point du côté [BC] tels que AM = BN.
   Proposition : Les droites (AN) et (DM) sont perpendiculaires.
7. Dans la figure ci-contre, D est un point du segment [AB], E un point du segment [AC] et F un point du segment [BC], avec AB = 35 et AD = BC = 21.
   Proposition : Le rectangle BDEF est un carré.



8. Soit ABCD un carré de côté 2 cm. I et J sont les milieux des côtés [DC] et [CB].
   Proposition : $\cos\widehat{\text{JAI}} = \dfrac{4}{5}$.
9. Proposition : La somme des carrés des sinus de deux angles complémentaires est égale à 1.
10. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel euclidien.
    Proposition : Si $\overrightarrow{u} \perp (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w})$ et $\overrightarrow{w} \perp (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$, alors $\overrightarrow{w} \perp (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$.
11. Soit (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont des réels, avec $a \neq 0$.
    Proposition : Si l'équation (E) admet deux solutions opposées non nulles, alors $b = 0$.
12. On définit deux fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 3x - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = 3x - \cos(x) + x^2\sin(x).$$

    Proposition : Les courbes représentatives des fonctions f et g ont la même tangente au point d'abscisse 0.

13. **Proposition** : La fonction $x \longmapsto \ln[\ln(x)]$ est définie sur $]0\,;\,+\infty[$.
14. **Proposition** : Les parties à 10 éléments sont deux fois plus nombreuses dans un ensemble à 20 éléments que dans un ensemble à 19 éléments.
15. Soit l'expérience aléatoire consistant à tirer l'une après l'autre et sans remise deux cartes dans un paquet de 12 cartes composé des 4 as, des 4 rois et des 4 dames.

    Proposition : La probabilité de tirer une dame en second est $\dfrac{1}{3}$.
16. On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6. La variable aléatoire X est définie par :

    $$X = \begin{cases} 2 & \text{si on obtient un nombre pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

    Proposition : La variable aléatoire X a pour espérance $E(X) = 1$.
17. Un QCM est constitué de trois questions. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est correcte.

    Axel répond au hasard et ses réponses sont indépendantes les unes des autres.

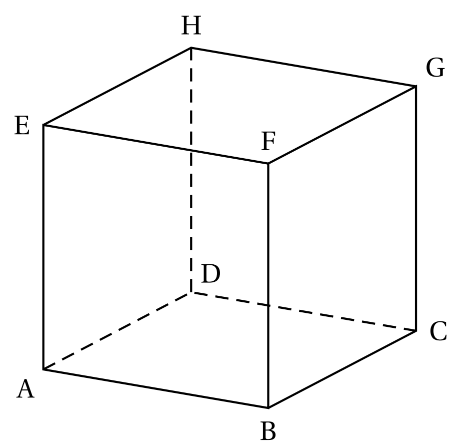
    Proposition : La probabilité qu'Axel ait au moins deux réponses correctes est supérieure à $\dfrac{1}{4}$.
18. La durée de vie T, en année, d'un objet suit une loi exponentielle de paramètre 0,25.

    Proposition : L'objet dure depuis 15 ans. La probabilité que l'objet ne fonctionne plus dans les cinq années suivantes est supérieure à $0,9$.
19. **Proposition** : La somme de deux diviseurs d'un entier est un diviseur de cet entier.
20. Les entiers x, y et z vérifient $x^2 + y^2 = z^2$.

    Proposition : x, y et z ne peuvent pas être impairs tous les trois.

Problème 2 : géométrie dans l'espace

La figure ci-dessous représente un cube ABCDEFGH d'un espace affine de dimension 3.



1. Justifier que les plans (AEH) et (BGD) ne sont pas parallèles.

La section plane d'un solide est la surface obtenue lors d'une coupe de ce solide par un plan.

2. Donner, sans justifier, la nature de la section du cube par le plan(BGD).
3. Répondre aux questions suivantes :
   a. Le triangle CDE est-il rectangle ?
   b. Les droites (DE) et (BD) sont-elles orthogonales ?
   c. Les droites (FD) et (AG) sont-elles sécantes ? sont-elles orthogonales ?

Problème 3 : suites, raisonnement et algorithmique

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 4u_n - 9n + 6 \quad \text{avec} \quad u_0 = 0.$$

1. Étude des termes de la suite :
   a. Calculer u_1, u_2 et u_3.
   b. La suite (u_n) est-elle arithmétique ?
      Préciser le type de raisonnement utilisé pour répondre à cette question.
   c. Démontrer que pour tout entier naturel n, u_n est multiple de 3.
      Préciser le type de raisonnement utilisé pour répondre à cette question.
2. Forme explicite de la suite (u_n) :
   Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3n + 1$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
   b. Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_n = 4^n + 3n - 1$.
3. Propriété caractéristique de la suite (u_n)
   Justifier que pour tout entier naturel n, u_n est pair, si et seulement si n est impair.
   Préciser le type de raisonnement(s) utilisé(s) pour répondre à cette question.
4. Comportement de la suite (u_n) :
   a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   b. Déterminer la limite de la suite (u_n).
   c. Écrire une fonction python **seuil**(S) qui donne, lorsque le seuil S est donné, la première valeur de n telle que $u_n > S$.
   d. Justifier l'arrêt de cet algorithme pour toute valeur de S et on donnera la valeur renvoyée par **seuil**(10**9).

Problème 4 : fonctions

Partie A : étude mathématique d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 6x\,\mathrm{e}^{-0,5x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement.

2. **a.** Justifier que f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, et que, pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = (6-3x)\,\mathrm{e}^{-0,5x}.$$

   b. Établir le tableau de variations complet de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. Justifier que l'équation $f(x) = \dfrac{6}{\mathrm{e}}$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.
Donner une valeur approchée de α par excès, à 10^{-2} près.

4. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, et que sur cet intervalle :

$$f''(x) = (1,5x-6)\,\mathrm{e}^{-0,5x}.$$

Étudier la convexité de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$. Préciser les points d'inflexion éventuels.

5. Soit A un réel strictement positif.

   a. Vérifier, à l'aide d'une intégration par parties, que :

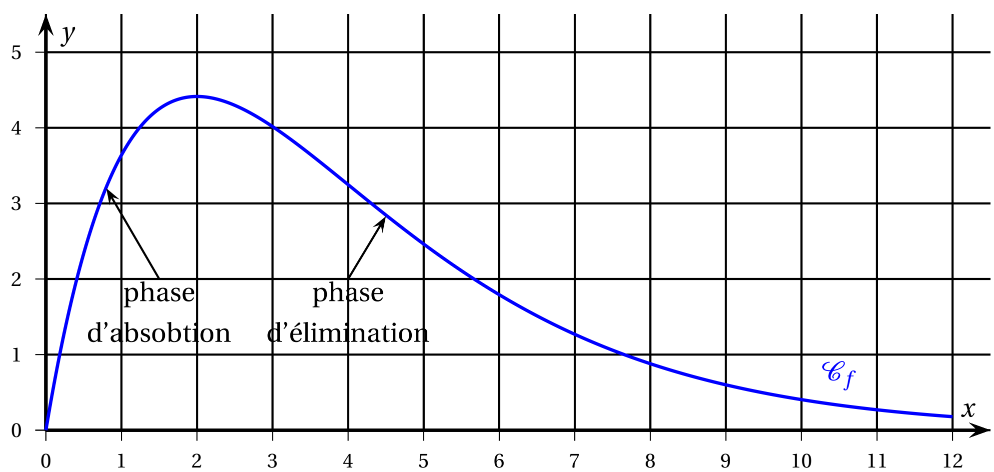
$$\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x = -12A\,\mathrm{e}^{-0,5A} - 24\,\mathrm{e}^{-0,5A} + 24.$$

   b. Interpréter graphiquement le résultat ci-dessus.

   c. Déterminer la limite de $\displaystyle\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque A tend vers $+\infty$.

Partie B : application

On étudie la concentration dans le sang d'un patient, en milligramme par litre (mg/L), d'un médicament absorbé par voie orale, en fonction du temps, exprimé en heure. Les résultats observés conduisent à modéliser l'évolution de la concentration du médicament par la fonction f étudiée dans la **partie A** et représentée ci-dessous.



La partie croissante correspond à la phase d'absorption.
La partie décroissante correspond à la phase d'élimination.

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la partie A.

1. D'après ce modèle, quelle est la concentration maximale du médicament dans le sang ?
2. On appelle demi-vie le temps nécessaire pour que la concentration de médicament présente dans le sang dans la phase d'élimination ait diminué de moitié par rapport à la concentration maximale.

   Préciser, d'après ce modèle, la demi-vie de ce médicament à la minute près.
3. Le coefficient directeur des tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ correspond à la vitesse d'absorption ou d'élimination du médicament dans le sang.

   D'après ce modèle, à quel instant la vitesse d'élimination est-elle la plus élevée ?
4. La mesure de l'exposition du patient au médicament, exprimée en mg/L.h est égale à l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   D'après ce modèle, quelle est l'exposition du patient à ce médicament ?