

∞ CAPES Concours externe Option mathématiques ∞  
18 mars 2024 épreuve 1

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Notations :

$\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{N}^*$  désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls.

$\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}_+$  désigne l'ensemble des nombres réels positifs.

$\mathbb{R}_+^*$  désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

**Problème 1 : VRAI - FAUX**

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

**Proportionnalité**

1. Pour que le tableau ci-dessous soit un tableau de proportionnalité il faut et il suffit que  $m = 5$ .

$1 - m$	$-3$
$8$	$1 + m$

2. Après une augmentation de 55 %, le coût d'un produit a baissé de 28 %. Le pourcentage d'augmentation total est de 27 %.
3. Si l'on augmente son rayon de 22 %, l'aire d'un disque augmente de 44 %.

**Analyse**

4. On considère la fonction  $F$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

On a

$$\frac{1}{e} \leq F(1) \leq 1 - \frac{1}{e}.$$

5. On note pour tout réel  $t \geq 1$ ,

$$A(t) = \int_1^t x^2 \ln x dx.$$

On a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{A(t)}{t^2} = +\infty.$$

6. Toute suite  $(u_n)$  qui vérifie l'assertion suivante tend vers  $+\infty$ .

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall A \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A).$$

### Arithmétique

7. On a  $\frac{3}{11} = 0,272727272727$ .

8. Le produit de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.

9. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La contraposée de l'assertion «  $n^2$  pair  $\Rightarrow n$  pair » est «  $n$  pair  $\Rightarrow n^2$  pair ».

10. Si la somme des chiffres en base 10 d'un entier naturel est divisible par 3 alors cet entier est divisible par 9.

11. Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels et  $n$  un entier naturel non nul.

Si  $2a = 2b \pmod{n}$  alors  $a = b \pmod{n}$ .

12. Soit  $n$  un entier naturel non nul, la somme des  $n$  premiers nombres impairs est égale au carré de  $2n + 1$ .

13. Soient  $a, b$  et  $c$  trois entiers tels que  $a^2 = b^2 + c^2$ .

L'un au moins des nombres  $a, b$  et  $c$  est multiple de 5. Géométrie

14. Un triangle dont les mesures des angles sont dans un ratio 1 : 2 : 3 est un triangle rectangle.

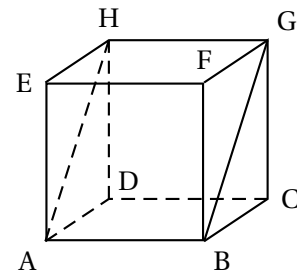
15. Dans un plan affine euclidien, on considère un triangle ABC sur lequel sont construits extérieurement les triangles équilatéraux ABD et ACE.

On a  $BE = DC$ .

16. Dans un espace affine euclidien, muni d'un repère cartésien orthonormé, les droites  $D$  et  $D'$  de représentations paramétriques

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 5 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = -5t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{sont coplanaires.}$$

17. On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous.



On se place dans le repère  $(D, \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DH})$ .

Le point  $K(9; -10; -8)$  est un point du plan (ABG).

### Dénombrement - Probabilités

18. Soit  $E$  un ensemble fini non vide dont un des éléments est noté  $a$ .

Il y a autant de parties de  $E$  contenant  $a$  que de parties ne le contenant pas.

19. Le nombre de trajets les plus courts pour aller du départ à l'arrivée sur le quadrillage ci-dessous est égal à 120.

20. Une agence reçoit en moyenne 8 appels téléphoniques par heure. On modélise le nombre d'appels reçus par heure par une loi de Poisson.  
La probabilité qu'il y ait plus de 3 appels téléphoniques au cours d'une heure est supérieure à 0,95.
21. Soient  $A$  et  $B$  deux évènements d'un espace probabilisé. Les assertions suivantes sont équivalentes
- les évènements  $A$  et  $B$  sont indépendants ;
  - les évènements  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.
22. On dépose au hasard  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  dans  $n$  urnes numérotées de 1 à  $n$ , en plaçant une boule par urne.  
L'espérance du nombre de coïncidences (boule de même numéro que l'urne où elle se trouve) est égale à 1.

### Algorithmique

23. Le programme ci-dessous est écrit en langage Python.  
En saisissant la commande `encadrement(0, 2, 0.001)`, on obtient un encadrement de longueur inférieure à  $10^{-3}$  de la solution de l'équation  $e^{\frac{x}{2}} + x^2 - 3 = 0$  dans l'intervalle  $[0; 2]$ .

```
1  from math import *
2  v def f(x) :
3      return exp(0.5*x)+x**2-3
4  v def encadrement (a, b, epsilon) :
5      m= (a + b)/2
6      v while b-a > epsilon :
7          v if f(a)*f(m) < 0 :
8              b=m
9          else :
10             v a=m
11             return a, b
```

## Problème 2 : quelques modèles de dynamique d'une population

Dans ce problème, on s'intéresse à différents modèles d'évolution d'une population. Les trois parties sont indépendantes.

### Le modèle logistique discret

Dans cette partie, on modélise la taille de la population par une suite  $(u_n)$  où  $n$  est un entier naturel qui désigne le temps écoulé depuis un instant donné pris pour origine. On suppose que la taille de la population est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un réel strictement positif  $M$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n < M.$$

Dans toute cette partie, on suppose  $0 < u_0 < M$ , et on pose  $v_n = \frac{u_n}{M}$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ . On a alors  $v_0 \in ]0 ; 1[$ .

On suppose qu'il existe un réel  $a$  tel que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = av_n(1 - v_n) \quad (1)$$

Le but de cette partie est d'étudier le comportement de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans le cas où  $0 < a \leq 1$  et de faire une étude numérique pour le cas  $a = \frac{5}{2}$ .

#### Le cas $0 < a \leq 1$

On rappelle que  $v_0 \in ]0 ; 1[$ .

On considère les fonctions  $f_a$  et  $g_a$  définies sur  $[0 ; 1]$  par

$$\forall x \in [0 ; 1], f_a(x) = ax(1 - x) \quad \text{et} \quad g_a(x) = f_a(x) - x.$$

1. Dresser le tableau des variations de la fonction  $f_a$  sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ .
2. Dédire de la question précédente que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n \in [0 ; 1]$ .
3. Démontrer que si la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $C \in [0 ; 1]$ , alors  $C$  est un point fixe de  $f_a$ , c'est-à-dire que  $f_a(C) = C$ .
4. Démontrer que  $f_a$  admet 0 pour unique point fixe dans l'intervalle  $[0 ; 1]$ .
5. Démontrer que  $g_a(x) \leq 0$  pour tout  $x \in ]0 ; 1[$ . On pourra utiliser l'inégalité  $1 - \frac{1}{a} \leq 0$ .
6. En déduire que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
7. Justifier la convergence de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers un réel que l'on déterminera.
8. Que prédit le modèle sur l'évolution de la taille de la population dans ce cas?

Le cas  $a = \frac{5}{2}$ .

On pose  $v_0 = \frac{1}{2}$ . On introduit les fonctions  $f, g$  et  $h$  définies pour  $x \in [0 ; 1]$ , par

$$f(x) = \frac{5}{2}x(1 - x), \quad g(x) = f(x) - x \quad \text{et} \quad h(x) = f \circ f(x) - x.$$

9. Démontrer que  $f$  admet sur  $[0 ; 1]$  exactement deux points fixes.
10. Calculer  $v_1, v_2, v_3$  et  $v_4$ . On donnera les valeurs décimales à  $10^{-3}$  près.

11. Écrire un algorithme qui permet de calculer les 10 premiers termes de la suite  $(v_n)$ .  
En déduire  $v_{10}$ .
12. Dans un repère orthonormé on a représenté, sur le graphique ci-dessous, pour des abscisses comprises entre 0,5 et 0,7 :
- la courbe représentative de la fonction  $f$ ,
  - la droite d'équation  $y = x$ .
- Reproduire le graphique en mettant en évidence les nombres  $v_0, v_1, v_2, v_3$  et  $v_4$ .
13. Vérifier que l'on a

$$\forall x \in [0 ; 1], h(x) = -\frac{x(5x-3)(25x^2-35x+14)}{8}.$$

14. En déduire que les fonctions  $f$  et  $f \circ f$  ont les mêmes points fixes sur  $[0 ; 1]$ .
15. Étudier le signe de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $[0 ; \frac{3}{5}]$ .
16. On admet que l'intervalle  $[\frac{2}{5} ; \frac{3}{5}]$  est stable par la fonction  $f \circ f$ . Déduire de la question précédente que la suite  $(v_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
17. Démontrer que la suite  $(v_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\frac{3}{5}$ .
18. En déduire que la suite  $(v_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge également vers  $\frac{3}{5}$ , puis que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\frac{3}{5}$ .
19. Conclure sur le comportement asymptotique de la taille de la population prédit par le modèle.

### Le modèle logistique continu

Dans cette partie, on modélise l'évolution de la population par une fonction. La taille de la population à l'instant  $t \in \mathbb{R}_+$  est représentée par le réel  $y(t)$  où  $y$  désigne une fonction de  $\mathbb{R}_+$  vers  $\mathbb{R}_+$ .

On suppose que la taille de la population est bornée par un réel strictement positif  $M$ , c'est-à-dire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 < y(t) < M.$$

On suppose qu'il existe un réel strictement positif  $a$  tel que  $y$  soit une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  solution de l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = ay(t)(M - y(t)).$$

20. a. Démontrer qu'il existe des réels  $\alpha, \beta$ , fJ que l'on déterminera tels que pour tout réel  $z$  vérifiant  $0 < z < M$ ,

$$\frac{1}{z(M-z)} = \alpha \frac{1}{z} + \beta \frac{1}{M-z}.$$

En déduire que  $y$  vérifie l'équation :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha \frac{y'(t)}{y(t)} + \beta \frac{y'(t)}{M - y(t)} - a = 0.$$

**b.** Déterminer en fonction de  $a$  et de  $M$ , une primitive de la fonction

$$\psi : t \mapsto \alpha \frac{y'(t)}{y(t)} + \beta \frac{y'(t)}{M - y(t)} - a \text{ sur } \mathbb{R}_+.$$

**21.** Dédire de la question précédente qu'il existe un réel  $c > 0$  tel que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$y(t) = \frac{cM e^{aMt}}{1 + c e^{aMt}}.$$

**22.** Déterminer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ .

**23.** Qu'en déduire sur l'évolution de la population prédite par le modèle ?

### Un modèle proies-prédateurs discret

On s'intéresse dans cette partie à l'évolution de deux populations dans le même milieu : une population de proies, et une population de prédateurs.

En préliminaire, on étudie les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  définies par les relations de récurrence suivantes. :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} x_{n+1} = x_n - \alpha y_n \\ y_{n+1} = y_n + \alpha x_n \end{cases}$$

où  $\alpha$  est un réel strictement positif et indépendant de  $n$ .

**24.** On introduit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ .

**a.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$  à l'aide de  $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  et  $A$ .

**b.** Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

**25. a.** Démontrer que  $A$  admet deux valeurs propres complexes, notées  $\lambda$  et  $\mu$ , que l'on précisera.

**b.** Justifier l'existence de  $r \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\theta \in [0; 2\pi[$  tels que  $\lambda = r e^{i\theta}$  et  $\mu = r e^{-i\theta}$ , et donner l'expression de  $r$  en fonction de  $\alpha$ .

**26.** Justifier l'existence d'une matrice inversible  $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

**27.** Démontrer que  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$  et déterminer  $P^{-1}$ .

**28.** Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1}$ .

29. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} x_n &= r^n (\cos(n\theta)x_0 - \sin(n\theta)y_0), \\ y_n &= r^n (\sin(n\theta)x_0 + \cos(n\theta)y_0). \end{cases}$$

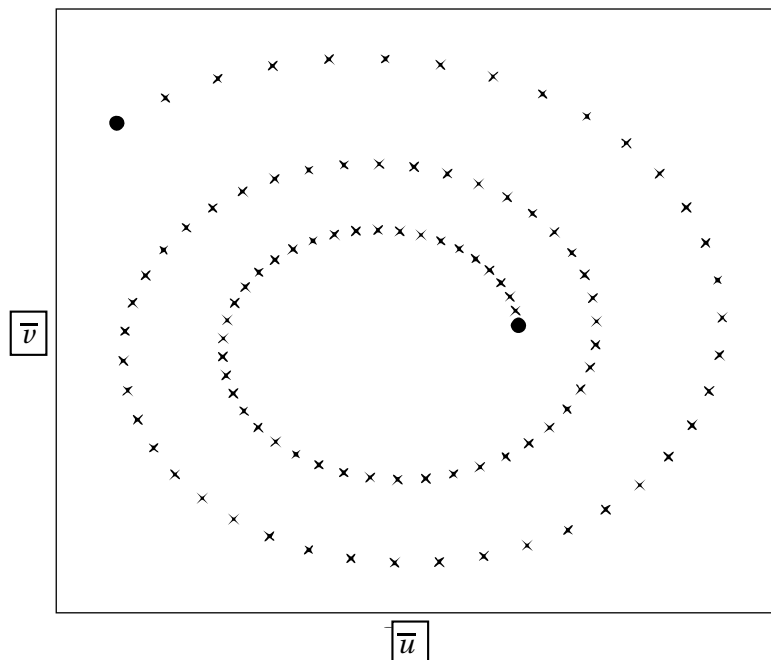
30. On propose dans la suite un modèle discret pour suivre l'évolution des populations de proies et de prédateurs.

L'entier  $n$  désigne le temps écoulé depuis un instant donné pris pour origine. Les tailles des populations de proies et de prédateurs sont respectivement données par les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :

$$\begin{cases} u_n &= \bar{u} + x_n, \\ v_n &= \bar{v} + y_n, \end{cases}$$

où les réels strictement positifs  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  sont fixés et correspondent à des tailles de référence pour les populations de proies et de prédateurs.

On a tracé sur le graphique ci-dessous les points de coordonnées  $(u_n ; v_n)$  pour les premières valeurs de  $n$  comprises entre 0 et un entier  $N$  strictement positif.



Faire une description qualitative de l'évolution des populations de proies et de prédateurs prédite par le modèle.

31. On suppose que  $x_0$  et  $y_0$  ne sont pas tous les deux nuls. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $x_n^2 + y_n^2$ , en fonction de  $r, x_0, y_0$  et en déduire que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne peuvent pas être toutes les deux bornées.

Discuter de la pertinence du modèle.