

∞ CAPES Concours externe Option mathématiques (bac +3) ∞
 18 mars 2026 épreuve 1

Ce sujet est composé de quatre exercices indépendants

Exercice 1 : Vrai/Faux

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Assertion 1. Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} . Si a est un réel tel que $f'(a) = 0$, alors f admet en a un minimum local ou un maximum local.

Assertion 2. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{n\pi} \sin^2(x) \, dx = \frac{n\pi}{2}.$$

Assertion 3. Soit t un réel différent de 1. Dans le plan complexe, on note A le point d'affixe t , B le point d'affixe 1, et C le point d'affixe $1 + i(1 - t)$. Le triangle ABC est isocèle et rectangle.

Assertion 4. On désigne par $\mathbb{R}[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes d'une indéterminée X et à coefficients réels. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, par abus de notation on note $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction (polynomiale) obtenue en évaluant sur \mathbb{R} le polynôme P . Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est de degré impair, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = 0$.

Assertion 5. On rappelle qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur un \mathbb{R} -espace vectoriel. On désigne par $\mathbb{R}_1[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes d'une indéterminée X et à coefficients réels de degré au plus 1. L'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) \end{aligned}$$

est un produit scalaire.

Assertion 6. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Soient $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1} \in \mathbb{C}$ les n racines n -ièmes de l'unité, et soit $p \in [1; n-1]$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p = 0.$$

Assertion 7. L'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1-x)y'(x) + y(x) = 0$$

admet au moins une solution définie sur \mathbb{R} autre que la fonction nulle.

Exercice 2 : Une suite d'intégrales

1. Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle en précisant le rayon de convergence.

Dans cet exercice, on étudie la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$I_0 = 1 \text{ et, pour } n \geq 1, \quad I_n = \int_0^1 \frac{1}{\prod_{k=1}^n (x+k)} dx - \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} dx.$$

On rappelle que $0! = 1$.

2. a. Calculer I_1 .
b. Déterminer a et b tels que pour tout $x \in [0; 1]$,

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$

- c. Calculer I_2 .
3. a. Établir que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq I_n \leq \frac{1}{n!}.$$

- b. En déduire que la série de terme général I_n , converge et déterminer un réel α tel que :

$$\alpha - 1 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} I_n \leq \alpha.$$

On rappelle pour la fin de l'exercice que, étant données $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites à valeurs réelles dont les termes ne s'annulent pas, on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont équivalentes quand $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.

4. a. Justifier que pour tout réel $t \in [0; 1]$

$$1 + t \leq \exp(t).$$

- b. Établir que, pour tout réel $t \in [0; 1]$:

$$t - t^2 \leq \ln(1 + t).$$

puis que, pour tout réel $t \in [0; 1]$:

$$\exp(t - t^2)$$

Dans la suite, pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

5. a. Rappeler ce qu'est une série de Riemann et à quelle condition nécessaire et suffisante une série de Riemann converge.
b. En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
c. Préciser la limite de la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Établir que, pour tout réel $x \in [0 ; 1]$:

$$n! \exp(xH_n - x^2 S_n) \leq \prod_{k=1}^n [(x+k)] \leq n! \exp(xH_n)$$

Indication : Vérifier que $\prod_{k=1}^n (x+k) = n! \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right)$ puis utiliser les résultats de la question 4.

b. En déduire que, pour tout réel $x \in [0 ; 1]$:

$$\frac{1}{n!} \exp(-xH_n) \frac{1}{\prod_{k=1}^n (x+k)} \leq \frac{1}{n!} \exp(-x(H_n - S_n))$$

c. Démontrer alors que

$$\frac{1 - \exp(-H_n)}{n! H_n} \leq I_n \leq \frac{\exp(-(H_n - S_n))}{n!(H_n - S_n)}$$

d. Établir que $I_n \sim \frac{1}{n! H_n}$.

7. On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n = H_n - \ln(n)$.

a. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \right)$.

b. En déduire que $(u_n)_{n \geq 2}$ est une suite décroissante à valeurs positives.

c. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ converge, puis que $I_n \sim \frac{1}{n! \ln(n)}$.

Exercice 3 : Puissances universelles

Dans cet exercice, on se place dans un ensemble E muni d'une structure d'anneau $(E, +, \times)$ et, pour a appartenant à E et k appartenant à \mathbb{N}^* , on s'intéresse à l'existence de solutions à l'équation $x^k = a$ d'inconnue x appartenant à E .

Plus précisément, soit a un élément de E :

- étant donné un entier naturel non nul k , on dit que a est une puissance k -ième s'il existe x appartenant à E tel que $x^k = a$;
- on dit que a est une puissance universelle si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, a est une puissance k -ième.

Pour tout anneau E , les éléments 0_E et 1_E (respectivement éléments neutres pour $+$ et \times) sont des puissances universelles de E car pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0_E^k = 0_E$ et $1_E^k = 1_E$.

L'exercice a pour objectif d'étudier certains cas particuliers et d'établir quelques résultats généraux, dans divers anneaux usuels.

Les deux parties sont indépendantes.

Première partie – dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2, et E désigne $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni de ses lois usuelles $+$ et \times . On notera $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}$ les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1. Un premier exemple

Dans cette question seulement, $n = 6$. Ainsi, $E = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$.

a. Calculer $\bar{2}^2, \bar{3}^2, \bar{4}^2$, et $\bar{5}^2$, images respectives de $\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ et $\bar{5}$ par l'application $x \mapsto x^2$.

b. En déduire que $\bar{0}$ et $\bar{1}$ ne sont pas les seules puissances universelles de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

2. Un deuxième exemple

Dans cette question seulement, $n = 4$. Ainsi, $E = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$.

Démontrer, en s'inspirant éventuellement de la question précédente, que $\bar{0}$ et $\bar{1}$ sont les seules puissances universelles de $E = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

3. Le cas particulier où n est premier

Dans cette question uniquement, n est un entier premier, et, par souci de clarté, n sera plutôt désigné par la lettre p .

a. Énoncer le petit théorème de Fermat.

b. En déduire à la fois que tout élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est une puissance p -ième, et que $\bar{0}$ et $\bar{1}$ sont les seules puissances universelles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

c. L'hypothèse « n est premier » est-elle une condition nécessaire pour que $\bar{0}$ et $\bar{1}$ soient les seules puissances universelles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Deuxième partie

– dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: étude du cas particulier des matrices diagonalisables

Dans cette partie $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ensemble des matrices carrées de taille n et à coefficients réels, et A est un élément de E

Rappelons qu'étudier si A est une puissance k -ième c'est chercher s'il existe une matrice M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^k = A$. Étudier si A est une puissance universelle, c'est étudier si, pour tout entier naturel non nul k , A est une puissance k -ième.

4. Dans cette question seulement $n = 1$ et on confond $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et \mathbb{R} .

Démontrer que l'ensemble des puissances universelles de \mathbb{R} est \mathbb{R}^+ .

5. Dans cette question, $n \geq 2$ et A, P et D sont trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que P est inversible, D est diagonale et $A = PDP^{-1}$.

a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Vérifier que si $N^k = D$, alors $(PNP^{-1})^k = A$.

b. Démontrer que A est une puissance universelle si, et seulement si D est une puissance universelle.

6. Dans cette question, $n \geq 2$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la la matrice diagonale suivante :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont tous deux à deux distincts.

- a. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice qui commute avec D . Démontrer que M est une matrice diagonale.
- b. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que si $M = D$, alors M et D commutent.
En déduire que D est une puissance universelle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, ses éléments diagonaux sont positifs.
- c. Supposons que A est une matrice possédant n valeurs propres réelles et deux à deux distinctes.
Quelle est la condition nécessaire et suffisante afin que la matrice A soit une puissance universelle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Justifier.

7. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- a. Démontrer par récurrence que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(R_\theta)^k = R_{k\theta}$.
Donner une interprétation géométrique de cette égalité.
- b. Démontrer que la matrice $R_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une puissance universelle.
8. Dans la question 6.b. on a montré la propriété suivante,
« Soit D une matrice diagonale à coefficients diagonaux réels deux à deux distincts. D est une puissance universelle si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont positifs ».
Peut-on affirmer la propriété suivante?
« Soit D une matrice diagonale à coefficients réels. D est une puissance universelle si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont positifs ».
Justifier votre réponse.

Exercice 4 : Tous à 6

Toutes les variables aléatoires introduites ci-après sont définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $q \in]0; 1[$. On rappelle que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de premier paramètre m et de second paramètre q si :

- $X(\Omega) = \llbracket 0; m \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 0; m \rrbracket, P(X = k) = \binom{m}{k} q^k (1 - q)^{m-k}$

On rappelle que, lorsqu'on répète m fois, et de façon indépendante, la même expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès vaut q , alors la loi du nombre de succès est la loi binomiale de premier paramètre m et de second paramètre q .

On rappelle aussi que si B est un événement de probabilité non nulle et si A est un événement quelconque on note $P(A|B)$ la probabilité de « A sachant B ».

1. Préliminaire : une suite arithmético-géométrique

Dans tout l'exercice, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ désigne la suite définie par

$$— p_1 = \frac{1}{6}$$

$$— \forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{5}{6}p_n + \frac{1}{6}$$

Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression explicite de p_n , en fonction de n .

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Un joueur dispose de N dés classiques à six faces.

Il effectue un premier lancer des N dés. À l'issue de ce premier lancer, il met de côté les dés ayant donné 6 et relance les autres (s'il en reste).

Il continue ainsi avec pour objectif que tous les dés aient donné 6.

Pour tout $\omega \in \Omega$, univers des possibles qu'on ne cherchera pas à expliciter, on note $S_n(\omega)$ le nombre total de dés ayant, après n lancers, donné 6.

On admet que S_n définit bien une variable aléatoire. Si pour un certain rang n_0 , tous les dés ont donné 6, c'est-à-dire si $S_n = N$, alors on considérera que $S_n = N$ pour tout entier $n \geq n_0$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser $S_n(\Omega)$, l'univers image de la variable aléatoire S_n .
- b. Quelle est la loi de S_1 ? On précisera, en le justifiant, ses paramètres

L'objectif des questions 3 à 5 est d'établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit la loi binomiale de paramètre N et p_n .

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in \llbracket 0; N \rrbracket$, et soit $i \in \llbracket 0; k \rrbracket$. Justifier que :

$$P(S_{n+1} = k | S_n = i) = \binom{N-i}{k-i} \frac{1}{6^{k-i}} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}$$

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que S_n suit une loi binomiale de premier paramètre N et de second paramètre p_n .

- a. Démontrer que, pour tout $k \in \llbracket 0; N \rrbracket$,

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^k \binom{N}{i} p_n^i (1-p_n)^{N-i} \binom{N-i}{k-i} \frac{1}{6^{k-i}} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}$$

Indication : on pourra appliquer la formule des probabilités totales en remarquant que

$((S_n = i))_{i \in \llbracket 0; N \rrbracket}$ est un système complet d'évènements.

- b. Vérifier que pour tout $k \in \llbracket 0; N \rrbracket$, pour tout $i \in \llbracket 0; k \rrbracket$

$$\binom{N}{i} \binom{N-i}{k-i} = \binom{N}{k} \binom{k}{i}$$

- c. Obtenir alors que, pour tout $k \in \llbracket 0; N \rrbracket$:

$$P(S_{n+1} = k) = \binom{N}{k} \left(\frac{1+5p_n}{6}\right)^k \left(1 - \frac{1+5p_n}{6}\right)^{5N-k}$$

5. Démontrer par récurrence et grâce aux questions précédentes, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit une loi binomiale de premier paramètre N et de second paramètre $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la variable aléatoire T par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n(\omega) = N\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n(\omega) = N\} \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi T représente le nombre de lancers nécessaires pour que tous les dés aient donné 6, en posant $T = 0$ si on n'obtient jamais tous les 6.

6. a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(1 \leq T \leq n) = \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right]^N$.
- b. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T = k)$ puis démontrer que $P(T = 0) = 0$.
Comment interpréter ce résultat?

FIN DU SUJET