

∞ CAPES Concours externe Option mathématiques (bac +3) ∞  
19 mars 2026 épreuve 2

A. P. M. E. P.

Ce sujet est formé de trois parties indépendantes et comporte deux documents joints

---

**PARTIE 1 : EXERCICES DE CRITIQUE ET RÉDACTION MATHÉMATIQUE**

---

Pour chacun des exercices ci-après une réponse est fournie.

1. Les réponses fournies sont-elles exactes? Repérer les erreurs et critiquer la rédaction de chaque réponse proposée.
2. Rédiger avec soin une réponse correcte pour chacun des exercices proposés.

**Exercice 1**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ .

**Réponse :**

Si  $x$  est solution, en multipliant l'équation par  $x$ , on obtient  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ . Mais,  $x^3 + x^2 + x = -1$ , donc  $x^4 = 1$ . Il s'ensuit que les seules solutions de l'équation sont  $x = -1$  et  $x = 1$ .

**Exercice 2**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles, continue sur  $\mathbb{R}$  et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [f(x)]^2 = 1$$

Montrer que  $f$  est constante.

**Réponse :**

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . L'équation  $[f(x)]^2 = 1$  admet pour solution 1 ou  $-1$ , donc  $f$  est constante, égale à  $-1$  ou 1.

**Exercice 3**

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout } n \geq 0, \quad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle convergente?

Si oui, donner la valeur de sa limite.

Réponse :

On commence par montrer par récurrence que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on introduit la proposition  $\mathcal{H}_n$ , définie par :

$$\mathcal{H}_n : \text{ « pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0 \text{ »}.$$

Comme  $u_0 = 1$ ,  $\mathcal{H}_0$  est vraie.

On suppose  $\mathcal{H}_n$  vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $u_{n+1} = 2u_n + 1$  et, par hypothèse de récurrence  $u_n \geq 0$ , on en déduit que  $u_{n+1} \geq 0$ , donc  $\mathcal{H}_{n+1}$  est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, on en déduit que  $\mathcal{H}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Or, si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = u_n + 1 \geq 0$ , donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. Ainsi, elle converge.

On note  $\ell$  sa limite. Par continuité de  $x \mapsto 2x + 1$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $\ell$  vérifie l'équation  $\ell = 2\ell + 1$ , soit  $\ell = -1$ .

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc vers  $-1$ .

## PARTIE 2 QUESTIONS SUR LE DOCUMENT I JOINT AU SUJET

Les questions ci-dessous portent sur le Document 1 concernant la méthode de Gauss, les formes linéaires et les hyperplans. Les notations utilisées ici sont les mêmes que dans le document. Les questions sont posées dans l'ordre chronologique de la lecture du document.

### 1 Méthode de Gauss

**Question 1.** Échelonner, à l'aide d'opérations élémentaires dûment détaillées, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Question 2.** Démontrer que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène  $AX = 0_{\mathbb{R}^m}$ , où  $A \in M_{m,n}$ , d'inconnue  $X \in \mathbb{R}^n$ , est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

**Question 3.** Soit,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Déterminer, en fonction du réel  $\lambda$ , le rang de

$U - \lambda I_3$ , où  $I_3$  est la matrice identité de  $\mathcal{M}_3$ . En déduire les valeurs propres de  $U$ .

**Question 4.** Démontrer la Proposition 3 (*Solutions d'un système linéaire non homogène*).

**Question 5.** Quel est le point en commun entre la Proposition 3 et la résolution de l'équation différentielle  $y' = ay + b$  où  $a, b$  sont des fonctions définies et continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ ?

**Question 6.** Démontrer le Théorème 2 (*Caractérisation d'une combinaison linéaire d'équations*) en utilisant les résultats qui le précèdent.

**Question 7.** Dans le Théorème 2, obtient-on un résultat valide si l'on remplace l'assertion : « Si le système  $S'$  admet les mêmes solutions que  $S$  alors l'équation (E) est une combinaison linéaire des équations de  $S$ . »

par

« Le système  $S'$  admet les mêmes solutions que  $S$  si, et seulement si, l'équation (E) est une combinaison linéaire des équations de  $S$ . »?

Justifier la réponse.

**Question 8.** Soit le plan  $P$  de l'espace passant par l'origine du repère et engendré par les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j} + 2\vec{k}$ . On sait que  $M \in P$  si, et seulement si,  $(\vec{OH}, \vec{i})$  et  $\vec{j} + 2\vec{k}$  est une famille liée.

À l'aide d'un calcul de rang, démontrer que  $P = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - 2y = 0\}$ .

**Question 9.** Soient deux plans distincts  $P_1$  et  $P_2$ , d'équation respectives

$$3x + 4y - z = 1 \quad \text{et} \quad x + y + z = 5.$$

À l'aide de la méthode de Gauss, démontrer que l'intersection de ces deux plans est une droite dont on déterminera un point et un vecteur directeur.

**Question 10.** Comme proposé dans la Remarque 5, retrouver, à l'aide du Théorème 1 (Rouché-Fontené), les différents cas possibles d'intersections de deux plans quelconques  $P_1 \cap P_2$  dans l'espace et les illustrer par des croquis en perspective.

**Question 11.**

1. Prouver la Remarque 6 (*Produit vectoriel*).
2. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre  $m \in \mathbb{R}$  les plans d'équations  $(1 - m)x + (2 + m)y - z = 3$  et  $2x + (4 - 2m)y + (m - 2)z = m$  sont-ils parallèles?
3. Parmi la ou les valeurs du paramètre  $m$  trouvée(s) ci-dessus, existe-t-il des cas où les plans sont confondus?

**Question 12.** Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux plans d'équation respective  $(E_1)$  et  $(E_2)$ . Expliquer pourquoi, si l'on suppose  $P_1$  et  $P_2$  non parallèles, alors cela permet d'affirmer que l'équation de la forme  $\alpha(E_1) + \beta(E_2)$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels non tous les deux nuls, représente toujours un plan.

## 2 Formes linéaires et hyperplans

**Question 13.**

1. Démontrer que  $\text{tr} : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme linéaire.
2. Démontrer que  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ , pour tout couple  $(A, B) \in \mathcal{M}_n$ .
3. Donner un exemple de forme linéaire  $\varphi$  sur  $\mathcal{M}_n$  qui ne vérifie pas la propriété  $\varphi(AB) = \varphi(BA)$  pour tout couple  $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2$ .  
On pourra chercher un exemple avec  $n = 2$ .
4. Montrer qu'une forme linéaire  $\varphi$  définie sur  $\mathcal{M}_n$ , vérifiant :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(BA)$$

est proportionnelle à  $\text{tr}$ .

On pourra utiliser la base canonique de  $\mathcal{M}_n$ .

**Question 14.** En utilisant  $\text{tr}$ , montrer qu'il n'existe pas de matrices  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}$ , telles que  $AB - BA = I_n$ , avec  $I_n$ , la matrice identité de  $\mathcal{M}_n$ .

**Question 15.** Une forme linéaire non nulle sur  $E$  est-elle toujours injective? Toujours surjective?

**Question 16.** On note  $\mathbb{R}_2[X]$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2. Justifier que la famille  $\left(\frac{1}{2}X(X-1), \frac{1}{2}(X-1)(X-2), -X(X-2)\right)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  et préciser sa base duale.

**Question 17.** Donner une preuve de la Proposition 5 (*Base de l'espace dual*) en utilisant les résultats qui la précèdent.

**Question 18.** Rédiger une démonstration du Théorème 4 (*Hyperplans et noyaux de formes linéaires*) à partir des Commentaires sur la démonstration.

**Question 19.**

Soit  $\varphi$  une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^n$ . Démontrer qu'il existe un unique vecteur  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . En utilisant le Théorème 5 (*Intersection d'hyperplans*), démontrer qu'il existe

$A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n-k,n}$  telle que : pour tout  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ ,

$$x \in F \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-k,1}x_1 + \dots + a_{n-k,n}x_n & = & 0 \end{cases}$$

**Question 20.** Soit  $P$  le plan passant par l'origine du repère et engendré par les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j} + 2\vec{k}$  considéré dans la **Question 8**.

Déterminer une équation cartésienne du plan affine  $\mathcal{P}$  parallèle à  $P$  et passant par le point de coordonnées  $(1; 2; -1)$ .

---

### PARTIE 3 : QUESTIONS SUR LE DOCUMENT 2 JOINT AU SUJET

---

Les questions ci-dessous portent sur le **Document 2**, à propos de l'intersection de plans (dans  $\mathbb{R}^3$ ).

Dans le Document 2 le repère n'est pas indiqué. On confondra un point avec ses coordonnées dans ce repère, dans lequel on supposera que  $I = (1; 0; 1)$ ,  $J = (1; 1; 0)$ ,  $K = (0; 1; 1)$  et  $F = (1; 1; 1)$ .

Toutes les réponses doivent être justifiées.

**Question A.** Déterminer les coordonnées des sommets du cube ABCDEFGH et vérifier en particulier qu'elles sont toutes égales à 1 ou -1.

**Question B.** Déterminer une équation cartésienne des plans (ABC) et (IJK). Quel est le faisceau de plans engendré par (ABC) et (IJK) ?

**Question C.** Déterminer les coordonnées des points N et M.

**Question D.** Soient  $O = (0; 0; 0)$  et  $P = (0; 1; -1)$ . Démontrer que le plan (IJP) contient O.

**Question E.** Déterminer l'intersection du plan (IJP) et de la droite (EH).

**Question F.** Puisque le plan (IJP) contient O, il peut être vu comme un plan vectoriel. Déterminer une forme linéaire  $\phi = \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\ker(\phi) = (IJP)$ . Cette forme est-elle unique ?

**Question G.** L'hypothèse «  $F = (1; 1; 1)$  », est-elle nécessaire ou peut-elle être déduite de l'assertion «  $I = (0; 1; 1)$ ,  $J = (1; 1; 0)$ ,  $K = (1; 0; 1)$  » ?

### FIN DES TROIS PARTIES ET DES QUESTIONS