CAPES externe 2005

Première épreuve écrite

Notations et objet du problème

On désigne par :
$\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels ;
$\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs ;
$\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels ;
$\mathbb{Q}^*$ l'ensemble des nombres rationnels non nuls ;
$\mathbb{R}$ le corps des nombres réels ;
$\mathbb{R}^*$ [resp. $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels non nuls [resp. strictement positifs] ;
$\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes ;
$\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls ;
$\mathbb{Z}[x]$ l'anneau des fonctions polynomiales à coefficients entiers relatifs.
Pour tout entier naturel n, on note $n!$ la factorielle de n avec la convention $0! = 1$.
Si f est une fonction indéfiniment dérivable définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et k est un entier naturel non nul, on note $f^{(k)}$ la fonction dérivée d'ordre k de f. On utilise la convention habituelle, $f^{(0)} = f$.
Si I est un intervalle réel non réduit à un point et f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{C}^*$, on rappelle que la dérivée logarithmique de f est la fonction $\dfrac{f'}{f}$.

La première partie de ce problème est consacrée à la démonstration de quelques résultats utiles pour la suite.

Dans la deuxième partie, à partir d'une caractérisation des sous groupes additifs de $\mathbb{R}$ (ils sont denses ou discrets), on déduit un critère d'irrationalité et on décrit une méthode permettant de prouver qu'un réel est irrationnel.

Cette méthode est utilisée dans la troisième partie pour montrer l'irrationalité de e^r pour tout nombre rationnel non nul r. Ce procédé permet également d'obtenir des approximations rationnelles de la fonction exponentielle.

Dans la quatrième partie on s'intéresse aux racines réelles des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants et en particuliers aux racines réelles des fonctions de Bessel d'indice entier.

Enfin dans la cinquième partie, on montre que les racines réelles non nulles des fonctions de Bessel d'indice entier sont irrationnelles en utilisant une méthode voisine de celle décrite dans la deuxième partie.

On rappelle la formule d'intégration par parties itérée : si $a,\ b$ sont des réels tels que $a < b$, n un entier naturel non nul et $f,\ g$ des fonctions définies sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ à valeurs réelles et admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre n, alors :

$$\int_a^b f^{(n)}(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}f^{(n-k)}g^{(k-1)}\right]_a^b + (-1)^n\int_a^b f(t)g^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

- I - Résultats préliminaires

Pour cette partie, on désigne par p un entier naturel, par P une fonction polynomiale dans $\mathbb{Z}[x]$ non identiquement nulle, de degré p, et par n un entier naturel.

1. Soit Q la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in R, Q(x) = \frac{x^n}{n!}P(x).$$

a. Montrer que pour tout entier naturel k, $Q^{(k)}(0)$ est un entier relatif.

b. Montrer que pour tout entier naturel k compris entre 0 et p, $\dfrac{Q^{(n+k)}(0)}{k!}$ est un entier relatif.

2. Soit R la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ R(x) = \frac{1}{n!}[x(1-x)P(x)]^n.$$

a. Montrer que pour tout entier naturel k les quantités $R^{(k)}(0)$ et $R^{(k)}(1)$ sont des entiers relatifs.

b. Montrer que la fonction polynomiale U définie par $U = R^{(n)}$ appartient à $\mathbb{Z}[x]$.

3. En reprenant les notations de **I. 2.**, où P dans $\mathbb{Z}[x]\ \{0\}$ est de degré p, montrer que pour toute fonction f indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on a :

$$\int_0^1 f(t)R^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 f^{(n)}(t)R(t)\,\mathrm{d}t.$$

- II - Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ et critères d'irrationalité

On dit qu'un sous-groupe additif H de $(\mathbb{R},\ +)$ est discret si pour tout compact K de $\mathbb{R}$, l'intersection $H \cap K$ est vide ou finie.
Pour tout réel θ, on note $H_\theta = \mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ engendré par 1 et θ. Il est défini par :

$$H_\theta = \left\{p + q\theta \mid (p,\ q) \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$

1. Montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ discrets sont de la forme :

$$\alpha\mathbb{Z} = \{p\alpha \mid p \in \mathbb{Z}\},$$

où α est un réel.

2. Soient H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$ et $K = H \cap \mathbb{R}_+^*$.

a. Montrer que K admet une borne inférieure α dans $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que si α est strictement positif, alors α est dans K.

c. Montrer que si α est strictement positif, alors H est discret.

d. Montrer que si α est nul, alors H est dense dans $\mathbb{R}$.

3. Montrer qu'un réel θ est irrationnel si et seulement si le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, $H_\theta = \theta\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

4. Montrer qu'un réel θ est irrationnel si et seulement si il existe deux suites $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(q_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, q_n\theta - p_n \neq 0, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(q_n\theta - p_n\right) = 0. \tag{2}$$

5. Montrer l'irrationalité du nombre e= $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ en utilisant le résultat de la question II. 4.

6. Pour cette question, on se donne un entier naturel p, une fonction polynomiale P dans $\mathbb{Z}[x]$ de degré p ne s'annulant pas sur $]0\ ;\ 1[$ et on lui associe les suites de fonctions polynomiales $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} U_n(x) & = & \dfrac{1}{n!}[x(1-x)P(x)]^n, \\ L_n(x) & = & U_n^{(n)}(x). \end{array}\right.$$

On se donne également une fonction f indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on lui associe la suite de réels $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \int_0^1 f(t)L_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. On suppose que la fonction f vérifie l'hypothèse suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in]0\ ;\ 1[,\ f^{(n)}(t) \neq 0. \tag{H1}$$

Montrer alors que R_n est non nul pour tout entier naturel n.

b. On suppose que la fonction f vérifie l'hypothèse suivante :

il existe un réel $\rho > 0$ tel que la suite $\left(\dfrac{\int_0^1 \left|f^{(n)}(t)\right| \mathrm{d}t}{\rho^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. (H2)

Montrer que pour tout réel μ la suite $\left(\mu^n R_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

c. On suppose que la fonction f vérifie les hypothèses (H1), (H2) et l'hypothèse suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \frac{q_n\theta - p_n}{\alpha\lambda^n} \tag{H3}$$

où $\alpha,\ \lambda,\ \theta$ sont des réels non nuls et $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}},\ \left(q_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'entiers relatifs.

Montrer alors que le réel θ est irrationnel.

- III - Irrationalité de e^r pour $r \in \boldsymbol{Q}^*$

Pour cette partie, on désigne par $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites de fonctions définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} U_n(x) & = & \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}, \\ L_n(x) & = & U_n^{(n)}(x) \end{array}\right.$$

et par $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, R_n(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{xt} L_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel x non nul, $R_n(x)$ est non nul.

   b. Montrer que pour tout entier naturel n il existe un unique couple $(P_n,\ Q_n)$ de fonctions polynomiales appartenant à $\mathbb{Z}[x]$ de degré égal à n tel que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ R_n(x) = \frac{Q_n(x)\mathrm{e}^x - P_n(x)}{x^{n+1}}.$$

   c. Montrer que pour tout réel x on a, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(x^n R_n(x)\right) = 0$.

   d. Montrer que pour tout entier relatif non nul r, e^r est irrationnel.
2. Montrer que pour tout nombre rationnel non nul r, e^r est irrationnel.
3. Montrer que pour tout nombre rationnel r strictement positif et différent de 1, $\ln(r)$ est irrationnel.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $Q_n(0) \neq 0$ et que les parties régulières d'ordre $2n$ des développements limités au voisinage de 0 de e^x et $\dfrac{P_n}{Q_n}$ sont identiques (on peut utiliser I. 3).
5. Montrer que pour tout réel x, $Q_{2n}(x)$ est non nul et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} = \mathrm{e}^x.$$

6. Pour cette question, $n \in \{1 ; 2\}$.

a. Calculer $\dfrac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)}$ pour ces deux valeurs de n.

b. En déduire des approximations rationnelles du nombre e en précisant une majoration de l'erreur d'approximation.

- IV - Zéros des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2

1. Soient $I = [a ; b]$ un intervalle réel compact avec $a < b$, α, β, deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et f une solution sur I non identiquement nulle de l'équation différentielle :

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0.$$

Montrer que l'ensemble des zéros dans I de la fonction f est fini.

2. Soient I un intervalle réel non réduit à un point et f, g deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{C}^*$. Montrer que f et g ont même dérivée logarithmique sur I si, et seulement si, elles sont proportionnelles.

3. Soient I un intervalle réel non réduit à un point, a un réel dans I, f une fonction continûment dérivable de I dans $\mathbb{C}^*$ et θ_0 un réel tel que $f(a) = |f(a)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$. Montrer qu'il existe une unique fonction θ continûment dérivable de I dans $\mathbb{R}$ telle que $\theta(a) = \theta_0$ et $f(x) = |f(x)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}$ pour tout x dans I.

4. Pour cette question, α est une fonction continue de $I = [a ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+^*$, où a est un réel, et f une solution sur I, à valeurs réelles, non identiquement nulle de l'équation différentielle :

$$y'' + \alpha y = 0. \tag{3}$$

On désigne par r la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I,\ r(x) = \sqrt{[f(x)]^2 + [f'(x)]^2}.$$

a. Montrer que la fonction r est à valeurs strictement positives et continûment dérivable sur I.

b. Montrer qu'il existe une fonction θ continûment dérivable et strictement décroissante de I dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in I,\ \left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & r(x)\cos(\theta(x)), \\ f''(x) & = & r(x)\sin(\theta(x)). \end{array}\right.$$

c. On suppose pour cette question et la suivante que la fonction α est minorée sur I par une constante réelle λ strictement positive. Montrer que la fonction θ réalise une bijection de I sur $]-\infty ; \theta(a)]$.

d. Montrer que l'ensemble des zéros de la fonction f dans l'intervalle I forme une suite infinie strictement croissante de réels qui tend vers l'infini.

5. Pour cette question p désigne un entier naturel et on s'intéresse aux zéros d'une solution non identiquement nulle de l'équation de Bessel d'indice p :

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - p^2\right) y = 0. \tag{4}$$

a. Soit f une solution réelle non identiquement nulle sur $I = \mathbb{R}_+^*$ de (4) et g la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I,\ g(x) = \sqrt{x} f(x).$$

Montrer que g est solution sur I d'une équation différentielle de la forme (3) où la fonction α est à déterminer.

b. Montrer que la série entière de terme général $\dfrac{1}{k!(p+k)!}x^k$, où k est un entier naturel, a un rayon de convergence infini et que la fonction J_p définie par :

$$\forall x \in R,\ J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p I_p\left(-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right),$$

où on a noté pour tout réel x :

$$I_p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!(p+k)!} x^k,$$

est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (4) .

c. Montrer que l'ensemble des zéros dans $\mathbb{R}_+$ de la fonction J_p forme une suite de réels qui est strictement croissante à partir d'un certain rang et qui tend vers l'infini.

- V - Irrationalité des zéros des fonctions de Bessel d'indice entier

Pour cette partie, p est un entier naturel fixé et les fonctions I_p et J_p sont celles définies en **IV. 5. b.**

1. a. Montrer que :

$$\forall r \in N\ \{0\},\ \forall x \in \mathbb{R}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{p+r} I_p'(x)\right) = x^{p+r-1}\left(I_p(x) + (r-1)I_p'(x)\right).$$

b. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x t^p I_p(t)\,\mathrm{d}t = x^{p+1} I_p'(x).$$

c. Montrer que pour tout entier naturel non nul r, il existe deux fonctions polynomiales A_r et B_r appartenant à $\mathbb{Z}[x]$, de degrés respectifs $r-1$ et r telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x t^{p+r} I_p(t)\,\mathrm{d}t = x^{p+1}\left(A_r(x)I_p(x) + B_r(x)I_p'(x)\right).$$

d. Préciser les valeurs de $A_r(0)$ et $B_r(0)$ pour tout entier naturel non nul r.

e. Montrer que si x est une racine réelle de la fonction I_p alors x est strictement négatif et n'est pas racine de I_p'.

On désigne par $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites de fonctions polynomiales définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} U_n(x) & = & \dfrac{x^{n+p}(1-x)^n}{n!}, \\ L_n(x) & = & U_n^{(n)}(x) \end{array}\right.$$

et par $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ R_n(x) = \int_0^1 I_p(xt)L_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe deux fonctions polynomiales P_n et Q_n appartenant à $\mathbb{Z}[x]$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ Rn(x) = \frac{P_n(x)I_p(x) + Q_n(x)I_p'(x)}{x^n},$$

avec $P_0 = 0,\ Q_0 = 1$, et pour $n \geqslant 1,\ P_n$ est de degré inférieur ou égal à $n-1,\ Q_n$ de degré inférieur ou égal à n, les valeurs $P_n(0)$ et $Q_n(0)$ étant non nulles.

3. Pour tout entier naturel n on désigne par φ_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = \int_0^1 I_p^{(n)}(xt)U_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Montrer que φ_n est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi_n(0)$ est non nul.

b. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Pn(x)I_p(x) + Q_n(x)I'p(x) = (-1)^n x^{2n}\varphi_n(x).$$

c. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\varphi_n(x)\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{|x|}}{n!}.$$

d. Montrer que pour tout réel x, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x)I_p(x) + Q_n(x)I'_p(x) = 0$.

4. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe une constante non nulle c_n telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n-1}(x)Q_n(x) - P_n(x)Q_{n-1}(x) = c_n x^{2n-2}.$$

5. Montrer que pour tout entier naturel non nul n et tout réel non nul x l'une des deux quantités $R_n(x)$ ou $R_{n-1}(x)$ est non nulle.

6. Montrer que les racines réelles de la fonction I_p sont toutes irrationnelles.

7. Montrer que si α est une racine réelle non nulle de la fonction de Bessel J_p, alors α^2 est irrationnel.