CAPES 2005

Deuxième épreuve écrite (annulée) Algèbre et Géométrie

Notations.
$\mathscr{P}$ est un plan euclidien.
Étant donnés deux points distincts A et B du plan $\mathscr{P}$, on note $]AB[$ le segment $[AB]$ privé de ses extrémités.
Si Γ est un cercle de centre Ω, de rayon R, on appellera « intérieur du cercle Γ » et on notera $\mathscr{I}(\Gamma)$ le disque ouvert, de centre Ω, de rayon R qui est limité par Γ.
On a donc $\mathscr{I}(\Gamma) = \{M \in \mathscr{P} \mid \Omega M < R\}$.
De même, l'extérieur du cercle Γ, noté $\mathscr{E}(\Gamma)$ est l'ensemble : $\mathscr{E}(\Gamma) = \{M \in \mathscr{P} \mid \Omega M > R\}$.

Recommandations importantes.

Les sept parties de ce problème sont très largement dépendantes. Il est recommandé de les traiter dans l'ordre, mais on pourra toujours admettre un résultat pour continuer le problème.
Dans ce problème, on demande plusieurs fois de proposer une *construction géométrique* d'une figure ou d'un élément d'une figure. Ceci signifie que l'on demande une suite d'instructions permettant de réaliser de façon théorique cette figure ou cet élément à l'aide de la règle et du compas. *On réalisera effectivement cette construction dans une figure.*
Cependant, on supposera connues, on ne détaillera pas et on pourra utiliser sans explication les constructions géométriques élémentaires classiques suivantes :
- tracé de la médiatrice ou du milieu d'un bipoint ;
- tracé du cercle passant par trois points non alignés ;
- tracé de la parallèle à une droite passant par un point donné ;
- tracé de la perpendiculaire à une droite passant par un point donné.

Partie I : Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit Γ un cercle de $\mathscr{P}$, de centre Ω, de rayon $R > 0$.

1. Soit M un point de $\mathscr{P}$, et soit $\mathscr{D}$ une droite passant par M et coupant Γ en deux points T_1 et T_2. On pose

$$p_{[\mathscr{D},\,\Gamma]}(M) = \overline{MT_1} \cdot \overline{MT_2}.$$

Montrer que $p_{[\mathscr{D},\,\Gamma]}(M) = \Omega M^2 - R^2$ donc que $p_{[\mathscr{D},\,\Gamma]}(M)$ ne dépend pas de la droite sécante $\mathscr{D}$.

(On pourra, introduire le point H, projeté orthogonal de Ω sur $\mathscr{D}$).

Dans cette situation, on pose $p_\Gamma(M) = p_{[\mathscr{D},\,\Gamma]}(M)$ (quelle que soit la droite $\mathscr{D}$ passant par M et coupant Γ en deux points) et on appelle cette quantité $p_\Gamma(M)$ *la puissance du point M par rapport au cercle* Γ.

2. Quel rapport y a-t-il entre le signe de la puissance d'un point M par rapport à un cercle Γ et sa position dans le plan ?

3. Quelle est la puissance du centre d'un cercle par rapport à ce cercle ?

4. Soit Γ un cercle et soit $\mathscr{D}_0$ une droite passant par M et tangente au cercle Γ en un point T.

Que peut-on dire du point M si une telle droite $\mathscr{D}_0$ existe ? $\mathscr{D}_0$ est-elle unique ? Montrer que $p_\Gamma(M) = MT^2$.

5. Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux cercles sécants en deux points A et B. Montrer que la droite (AB) est exactement l'ensemble de tous les points M du plan qui vérifient la relation

$$p_{\Gamma_1}(M) = p_{\Gamma_2}(M)$$

6. Déterminer la nature de l'ensemble des points qui ont la même puissance par rapport à deux cercles lorsque ceux-ci ne sont pas forcément sécants. Que peut-on en dire si les deux cercles sont tangents ?

7. $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Soit Γ un cercle dont l'équation cartésienne dans le repère $\mathscr{R}$ est $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
Déterminer la puissance du point O (origine du repère) par rapport à ce cercle.

Partie II : Construction d'une Π-droite

Dans cette partie, $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon R, et Π le disque ouvert limité par $\mathscr{C}$. A et B sont deux points distincts de Π.
Le but de cette partie est de montrer qu'en général, pour toute paire $\{A,\ B\}$ de points du disque ouvert Π, il y a existence et unicité, d'un cercle Γ passant par A et B, et coupant $\mathscr{C}$ en deux points *diamétralement opposés*, tout en proposant une construction géométrique de ce cercle Γ.

1. On suppose que A et B sont situés sur un même diamètre du cercle $\mathscr{C}$. Montrer qu'aucun cercle passant par A et B ne rencontre $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés. (On pourra calculer de deux manières la puissance de O par rapport à un cercle Γ qui passerait par A et B et qui couperait $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés).
2. On suppose que A et B ne sont pas situés sur un même diamètre et que $OA = OB$. Montrer dans ce cas l'existence et l'unicité d'un cercle Γ qui passe par A et B et qui rencontre $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés. Proposer une construction géométrique de ce cercle.
3. On suppose que $OA \neq OB$ et que A et B ne sont pas sur un même diamètre. On suppose qu'il existe un cercle Γ, de centre Ω, qui rencontre $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés T_1 et T_2.
   a. Montrer que (AB) rencontre $(T1T2)$ en un point unique S.
   b. Comparer $p_{\mathscr{C}}(S)$ et $p_{\Gamma}(S)$.
   c. Soit Γ' un cercle quelconque passant par A et B et rencontrant $\mathscr{C}$ en deux points U_1 et U_2 distincts. Comparer la puissance de S par rapport aux cercles $\mathscr{C}$, Γ et Γ' et en déduire que $S \in (U_1U_2)$.
   d. Lorsqu'on ne connaît pas le cercle Γ, déduire de ce qui précède une construction géométrique du point S, puis du cercle Γ.
   e. Justifier l'existence et l'unicité de Γ.
4. Autre démonstration de l'existence et l'unicité de Γ :
   Dans cette question, le plan euclidien $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$et $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O, de rayon $R = 1$.
   a. Montrer qu'un cercle Γ (distinct de $\mathscr{C}$) rencontre $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés si et seulement si $p_{\Gamma(O)} = -1$.
   b. En déduire une méthode analytique pour montrer l'existence et l'unicité de Γ en en déterminant une équation cartésienne puis son centre. Comment, dans cette méthode, reconnaît-on que les coordonnées de A et B sont telles qu'on est dans le cas particulier étudié à la question 1. ?

Partie III : Un problème de lieu géométrique

Dans cette partie, $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O, de rayon R, et A est un point distinct de O, situé dans le disque ouvert Π limité par $\mathscr{C}$. Le but de cette partie est de déterminer le lieu $\mathscr{L}$ des centres des cercles qui passent par A et qui coupent $\mathscr{C}$ selon deux points diamétralement opposés, puis d'en déduire une autre construction du cercle Γ de la partie II.

1. Soit $\left[T_0T_0'\right]$ le diamètre de $\mathscr{C}$ perpendiculaire à (OA). Soit Γ_0 le cercle circonscrit au triangle $T_0T_0'A$, et Ω_0 son centre. Soit Ω un point de la perpendiculaire Δ à (OA) qui passe par Ω_0. Soit $[T_1T_2]$ le diamètre de $\mathscr{C}$ qui est perpendiculaire à (ΩO).

a. Montrer que $\Omega T_i = \Omega A$ pour $i = 1,\ 2$.

b. En déduire que $\Delta \subset \mathscr{L}$.

2. Montrer l'inclusion réciproque.

3. Déduire de cette étude une nouvelle construction géométrique du cercle Γ qui passe par deux points A et B (non situés sur un même diamètre) du disque Π, et qui coupe $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés.

Partie IV : Un « plan » étonnant

On se place toujours dans un plan euclidien $\mathscr{P}$. On considère l'ensemble $\Pi = \mathscr{I}(\mathscr{C})$, qui est le disque ouvert limité par le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans le repère orthonormal $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath}\ ,\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. On appelle Π-droite un sous-ensemble de Π qui est d'un des deux types suivants :

- soit c'est l'intersection de Π avec un cercle Γ (distinct de $\mathscr{C}$) qui passe par deux points diamétralement opposés de $\mathscr{C}$.
- soit c'est l'intersection de Π avec un diamètre de $\mathscr{C}$.

Le cercle [respectivement la droite] qui contient tous les points d'une Π-droite est le support de la Π-droite.

1. Justifier que par deux points distincts de Π passe une unique Π-droite.

L'unique Π-droite passant par les deux points distincts A et B de Π sera notée $((AB))$.

2. Deux Π-droites seront dites Π-parallèles lorsqu'elles sont confondues ou que leur intersection est vide.

a. Montrer que si les supports de deux Π-droites se coupent en deux points diamétralement opposés de $\mathscr{C}$, alors ces Π-droites sont Π-parallèles.

b. Soit $U = \left]T_0T_0'\right[$ une Π-droite dont le support est un diamètre de $\mathscr{C}$ et soit V une Π-droite dont le support est un cercle Γ qui rencontre $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés T_1 et T_2 (non confondus avec T_0 ou T_0').

En considérant la puissance de O par rapport à Γ, montrer que O est intérieur au cercle Γ puis que la Π-droite $\left]T_0T_0'\right[$ rencontre la Π-droite dont le support est Γ en un point unique.

c. Montrer que si Γ et Γ' sont deux cercles coupant $\mathscr{C}$ en des couples différents de points diamétralement opposés respectivement $(T_1,\ T_2)$ pour Γ, $(T_1',\ T_2')$ pour Γ', alors Γ et Γ' se coupent en deux points d'un diamètre de $\mathscr{C}$, dont un seul est dans Π (on pourra considérer des équations cartésiennes de ces cercles).

d. Montrer que si deux Π-droites non confondues sont Π-parallèles, alors leurs supports se coupent en deux points diamétralement opposés de $\mathscr{C}$.

e. Montrer que la relation de Π-parallélisme est une relation d'équivalence dans l'ensemble des Π-droites.

3. Montrer que si deux Π-droites ne sont pas Π-parallèles, alors leur intersection est un singleton.

4. Montrer qu'étant donnés un point A de Π et une Π-droite U, il existe une unique Π-droite V qui est Π-parallèle à U et qui passe par A.

L'ensemble Π vérifie donc deux axiomes classiques d'incidence dans un plan affine.

Pour compléter l'étude de ce « plan », les parties suivantes vont montrer qu'il peut être mis en bijection avec un plan usuel.

Partie V : Grands cercles d'une sphère et droites d'un plan

Dans cette partie, Π_0 désigne le plan d'équation $z = 1$ dans un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R}' = \left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, et $\mathcal{P}$ désigne le plan d'équation $z = 0$; un repère orthonormal du plan $\mathcal{P}$ est donc $\mathcal{R} = \left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
Σ désigne la sphère unité, d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, et Σ^+ désigne le sous-ensemble de Σ formé des points M dont la troisième coordonnée z dans le repère $\mathcal{R}'$ est strictement positive.
On rappelle qu'un grand cercle d'une sphère est l'intersection d'un plan passant par le centre de la sphère avec cette sphère.
$\mathcal{C}$ désigne le cercle du plan $\mathcal{P}$ qui a pour centre O et pour rayon 1. $\mathcal{C}$ est donc aussi un grand cercle de Σ.

1. Montrer que l'intersection de deux grands cercles non confondus de Σ consiste toujours en deux points diamétralement opposés pour Σ.

2. Soit $\mathcal{Q}$ un plan passant par O, distinct de $\mathcal{P}$. Quelle est l'intersection de $\mathcal{Q}$ avec Σ ? Et avec Σ^+ ? Et avec $\mathcal{C}$?

3. Montrer qu'on définit correctement une application φ entre Π_0 et Σ^+ en associant à chaque point M de Π_0 le point d'intersection M_0 de la droite (OM) avec Σ^+. Montrer que φ est une bijection entre Π_0 et Σ^+.

4. Montrer que l'image d'une droite affine de Π_0 par φ est un « demi-grand-cercle » de Σ. Définir avec précision cette notion de « demi-grand-cercle ». Caractériser analytiquement l'image par φ d'une droite d'équations cartésiennes dans $\mathcal{R}'$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax+by+c & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{(avec } (a,b) \neq (0,0)\text{)}.$$

Partie VI : Une autre correspondance entre sphère et plan

Les notations sont les mêmes que dans la partie V. Σ^* désigne la sphère Σ privée de son « pôle sud », c'est-à-dire du point S de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,-1)$.

1. Montrer qu'on définit correctement une application ψ entre Σ^* et $\mathcal{P}$ en associant à chaque point M de Σ^* le point d'intersection M' de la droite (SM) avec $\mathcal{P}$. ψ est-elle bijective ?

2. Soit M un point de Σ^* de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ (dans $\mathcal{R}'$). Déterminer en fonction de $(x\,;\,y\,;\,z)$ les coordonnées $(x'\,;\,y'\,;\,z')$ de $M' = \psi(M)$.

3. Soit N un point de $\mathcal{P}$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ dans $\mathcal{R}$. Déterminer en fonction de $(x\,;\,y)$ les coordonnées $(X\,;\,Y\,;\,Z)$ de l'antécédent éventuel M de N par ψ.

4. Montrer qu'un grand cercle de Σ peut être caractérisé par un système d'équations du type

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax+by+cz & = & 0 \\ x^2+y^2+z^2 & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{(avec } (a\,;\,b\,;\,c) \neq (0\,;\,0\,;\,0)\text{)}.$$

5. Montrer que l'image par ψ d'un grand cercle de Σ ne passant pas par S est un cercle de $\mathcal{P}$.

Quelle est l'image par ψ de l'intersection avec Σ^* d'un grand cercle de Σ passant par S ?

6. Soit $\mathcal{D}$ un grand cercle de Σ et soit $\mathcal{D}^* = \mathcal{D} \cap \Sigma^*$. Que peut-on dire de l'intersection de $\psi(\mathcal{D}^*)$ avec $\mathcal{C}$?

7. On appelle ψ^+ la restriction de ψ à Σ^+. Montrer que ψ^+ réalise une bijection de Σ^+ vers le disque ouvert limité par $\mathcal{C}$.

8. Montrer que l'image d'un « demi-grand-cercle » (voir V. 3) par ψ^+ est une Π-droite (voir partie IV).

Partie VII : Synthèse et application

Les notations sont celles des parties précédentes.

1. Démontrer l'existence d'une bijection h du plan affine Π_0 vers l'ensemble Π induisant une bijection entre l'ensemble des droites de Π_0 et l'ensemble des Π-droites et conservant le parallélisme (en ce sens que deux droites parallèles de Π_0 sont transformées en deux Π-droites Π-parallèles).
2. Donner des formules analytiques de h, c'est-à-dire un système exprimant les coordonnées $(x' ;\ y')$ dans le repère $\mathcal{R}$ de l'image $h(M)$ d'un point M en fonction de ses coordonnées $(x ;\ y ;\ 1)$ dans $\mathcal{R}'$.
3. Inverser le système précédent pour obtenir en fonction des coordonnées d'un point M celles de $h^{-1}(M)$.
4. Voici une *définition du* Π*-milieu de deux points de* Π.

   Soient A et B deux points de Π. *Soit C un point quelconque de* Π, *non situé sur* $((AB))$. *On considère le point D, intersection de la* Π*-droite qui passe par B et qui est* Π*-parallèle à* $((AC))$ *et de la* Π*-droite qui passe par A et qui est* Π*-parallèle à* $((BC))$. *On appelle* Π*-milieu de la paire* $\{A,\ B\}$ *le point I intersection des* Π*-droites* $((AB))$ *et* $((CD))$.

   En utilisant la bijection h, démontrer que cette définition est correcte : on vérifiera que les Π-droites $((AB))$ et $((CD))$ ne sont pas Π-parallèles, et que cette définition ne dépend pas du point C arbitrairement choisi.
5. Soit A le point de Π de coordonnées $\left(0 ;\ \frac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{4} ;\ 0\right)$.

   Donner une construction géométrique détaillée du Π-milieu I de $\{A,\ B\}$. (On fera une figure en prenant 8 cm comme unité)
6. Donner les coordonnées des points $A' = h^{-1}(A)$, $B' = h^{-1}(B)$ et $I' = h^{-1}(I)$. En déduire les coordonnées de I dans le repère $\mathcal{R}$.