CAPES externe 2005

Deuxième épreuve écrite (épreuve de remplacement)

Sauf exceptions dûment signalées, chaque partie peut être traitée indépendamment des autres.

Dans tout le problème, on se place dans le cadre d'un plan euclidien Π rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\in 1},\ \overrightarrow{\in 1}\right)$ par rapport auquel les coordonnées sont notées x et y. La droite Δ est définie par son équation $x = a$ où a est une constante réelle strictement positive ; elle coupe l'axe des abscisses au point A.

La notation :

$$X = \{M|\varphi(x\ ;\ y) = 0\}$$

désigne la partie X du plan définie comme l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient l'égalité $\varphi(x\ ;\ y) = 0$; cette relation est alors appelée une équation de X. Une définition analogue est posée dans le cas de coordonnées polaires $(\rho,\ \theta)$ par rapport au repère formé du point O et de la demi-droite $\mathbb{R}_+\overrightarrow{\in 1}$.

Première partie

Soit k une constante réelle strictement positive. On note Φ la courbe décrite par le point M de coordonnées :

$$x = a + k\cos t, \quad y = a\tan t + k\sin t$$

où t décrit la réunion $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

On note H la projection orthogonale de M sur Δ et Ω le point de Δ d'ordonnée $a\tan t$.

1. Dans le cas particulier $a = 1$, $k = 2$, étudier la courbe Φ (variations, étude asymptotique, points singuliers, représentation graphique, ...) ; on pourra s'aider d'une calculatrice graphique.
2. Donner l'allure de Φ dans le cas général, en distinguant :
   a. les cas où $0 < k < a$,
   b. le cas où $k = a$,
   c. les cas où $k > a$.
3. Déterminer une fonction polynomiale f à deux variables telle que $f(x\ ;\ y) = 0$ soit une équation de Φ.
4. Donner une équation polaire de Φ.
5. Déterminer les points réguliers M de Φ et donner en ces points les coordonnées d'un vecteur normal.
6. Calculer les coordonnées du point d'intersection R de la normale en M avec la droite d'équation $y = a\tan t$ dans le cas où M n'appartient pas à l'axe des abscisses. Que peut-on dire du triangle $RO\Omega$?

Deuxième partie

Sont traitées ici quelques propriétés des coniques exclusivement utilisées dans les troisième et quatrième parties.

Un axe est défini par une droite D, un point O_1 de D et un vecteur unitaire $\overrightarrow{\in 1}$ dirigeant D. Pour tout couple $(A,\ B)$ de points de D, on appelle mesure algébrique et l'on note $\overline{AB}$ la différence $x_b - x_A$ de leurs abscisses relatives au repère $\left(O_1,\ \overrightarrow{\in 1}\right)$: on remarquera qu'elle est indépendante du point O_1.
La distance de deux points M et N du plan est notée MN. S'ils sont distincts, on note (MN) l'unique droite qui les joint.

Sur l'hyperbole

1. Écrire le théorème de Thalès dans le plan, ainsi que sa réciproque, en utilisant les mesures algébriques définies ci-dessus : on se donnera deux axes distincts coupant chacun un triplet de droites $(D,\ D',\ D'')$ dont les deux dernières sont parallèles et disjointes, et l'on écrira, sans justification, une condition nécessaire et suffisante sur les six points d'intersection pour que les deux premières le soient, éclairée par une figure à main levée.
2. Soient trois axes du plan Π dont les deux premiers, sécants en un point O_1, sont respectivement l'axe des abscisses $(O_1 x)$ et l'axe des ordonnées $(O_1 y)$ d'un certain repère affine, le troisième les coupant respectivement en deux points distincts U et V.

   Pour tout point M de (UV), autre que U ou V, on note P et Q ses projections respectives sur chacun des deux axes de coordonnées parallèlement à l'autre. Déterminer l'unique hyperbole H passant par M et admettant $(O_1 x)$ et $(O_1 y)$ comme asymptotes (on pourra introduire les projections sur les axes d'un point courant M' de H).
3. À l'aide par exemple du théorème de Thalès, montrer qu'un point M' de (UV), distinct de M, appartient à H si, et seulement s'il est symétrique de M par rapport au milieu de $[UV]$.
4. Quelle propriété obtient-on si l'on fait tendre un point N de H vers M ?

Sur la parabole

Dans ce qui suit, M est un point d'une parabole P de foyer F, de sommet S et de directrice D, et H sa projection orthogonale sur D.

5. Soit T la médiatrice du segment $[FH]$. Montrer que, pour tout point N de T différent de M et se projetant orthogonalement en K sur D, on dispose de l'inégalité $NF > NK$. Ce résultat reste-t-il valable si l'on considère un point N' tel que $N'F > N'H$?
6. Déduire de la question précédente que la tangente à P en M est la médiatrice du segment $[FH]$.
7. Quel est l'ensemble des projections orthogonales de F sur les tangentes à la parabole ?
8. Cette question établit les principales propriétés de la puissance d'un point par rapport à un cercle.
   - **a.** Si A et B sont deux points d'un cercle du plan Π alignés avec M, on définit la puissance de M par rapport au cercle comme le nombre $\overline{MA}\cdot\overline{MB}$ s'ils sont distincts, et $\overline{MA}^2$ s'ils sont confondus et si M appartient à la tangente en A. Établir la cohérence de cette définition.
   - **b.** Si $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ est le couple des coordonnées de M relatives à un repère orthonormé dans lequel le cercle a pour équation :

     $$C(x\ ;\ y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0,$$

     montrer que la puissance de M est égale à $C\left(x_0\ ;\ y_0\right)$.
   - **c.** Que peut-on dire des points de puissance nulle par rapport au cercle ?
   - **d.** Déterminer (par exemple analytiquement) l'axe radical de deux cercles de centres distincts, c'est-à-dire le lieu des points ayant mêmes puissances par rapport à ces cercles.
9. Soit (M, M') un couple de points distincts de P, I leur milieu et H et H' leurs projections orthogonales respectives sur D.

a. Déterminer l'ensemble des points ayant même puissance par rapport aux deux cercles passant par F et respectivement centrés en M et M'.

b. Soit J l'intersection de l'axe radical précédent et de la directrice. Que peut-on dire du triplet de points $(J,\ H,\ H')$?

10. Cette question établit la principale propriété des cordes de P ayant une direction donnée.

a. Montrer que, lorsque l'on fait varier le couple $(M,\ M')$ de façon que la droite (MM') reste parallèle à une direction fixe, le point I décrit alors une partie d'une droite orthogonale à D.

b. Que devient la configuration précédente lorsque la droite (MM') devient tangente à la parabole ? Relier la figure ainsi obtenue au résultat de la question 7.

c. Soit une droite quelconque perpendiculaire à D. Montrer qu'elle est un axe de symétrie (généralement non orthogonale) pour la parabole et donner une construction géométrique de la direction selon laquelle s'exerce cette symétrie.

11. Soit Q un point de P distinct de S et $(N,\ M)$ un couple de points distincts de P déterminant une corde parallèle à SQ. On note L le point défini par $\overrightarrow{\in 1} = \overrightarrow{\in 1}$, A le symétrique orthogonal de N par rapport à l'axe SF de la parabole, Ω et R les projections respectives parallèlement à l'axe de A et de Q sur (NM). Déduire de la question précédente l'égalité $\overrightarrow{\in 1} = \overrightarrow{\in 1}$.

Étendre le résultat au cas où $M = N$ et où l'on remplace la droite (NM) par la tangente à P en N.

Troisième partie

Soit Γ une courbe du plan Π privée de ses éventuels points d'abscisse nulle. On dit qu'une courbe C de Π est la transformée de Descartes de ' relative à O et à " si elle est formée des points M tels qu'il existe un point de " et un point P commun à (O)etàΓ tels que O ? ?"P = ? ?M".

1. Si Γ est définie par des équations paramétriques de la forme : x = (t), y = '(t), montrer qu'une représentation paramétrique de sa transformée de Descartes C s'écrit sous la forme : x = a + (t), y = '(t) (t) [a + (t)].

2. Donner une équation cartésienne des transformées de Descartes des droites Γ de Π privées de leurs éventuels points d'abscisse nulle. Expliquer le résultat trouvé à partir des propriétés mises en évidence dans la deuxième partie.

3. Donner une équation cartésienne de la transformée de Descartes de la parabole d'équation y = cx2 (c > 0) privée de son sommet.

4. Retrouver ce résultat gr ?ace à une question de la deuxième partie.

5. Montrer que C, la courbe d'équation cartésienne : y(x ? a) = x (c (x ? a ? b)2 + d) (c = 0)$privéedesespointsd'abscissea, estlatransforméedeDescartesdelaparabole' d'équationy =$
$c(x?b)2+dprivéedupoint(0, b2c+d).MontrerquecettecourbeCadmetuneparaboleasymptote, c'es$
à $-dired'équationy = "(x)$où"$estunpolyn?omeduseconddegrételque$:
$lim|x|" + [y?"(x)] = 0, paraboledontonpréciseralapositionrelative$à$C$.

6. Donner la forme de cette courbe C pour b = 0, c = 1, d = 1 et a = 1, puis pour a = 6 (dans ce second cas, on pourra plus précisément étudier l'allure de C aux voisinages des points d'abscisse x = 4 et x = 6).

7. étudier la transformée de Descartes C d'un cercle Γ de centre O et de rayon k privé de ses deux points d'abscisse nulle. Que retrouve-t-on ainsi ?

Tournez la page S.V.P.

Quatrième partie

Cette partie utilise la première question de la partie précédente.

1. Vérifier que = ?a cos t, où t décrit " ? 2 , 2 , est une équation polaire du cercle ' passant par O, centré au point de coordonnées ?$a2,0etprivédesonpointd'abscissenulle.Vérifierques$
$x = asin2t, y = atantsin2t.Donnerlaformedelacourbe.MontrerqueCadmetuneautrereprésenta$
$x = am21+m2, y = am31+m2ůCommentpeut-onrelierlesdeuxreprésentations$?

2. Soit P la parabole d'équation y2 = ?4a x et M un point de C distinct de O. On note M1 le point distinct de O commun à P et à la droite (OM). Calculer le produit scalaire (O ? ?M ?"1 ΠΠ O ? ?M").
3. Montrer qu'il existe un unique point M2 de P, dont on donnera les coordonn ées, tel que la tangente en M2 à P coupe orthogonalement (OM) en M.
4. Notant $lepointde"associéàMlorsdelaconstructiondelatransforméedeDescartesde'parrapportàOm$
$x(x2 + y2) = ux2 + 2vxy + wy2$.

5. Cinquième partie

On revient maintenant à une courbe ' quelconque, privée de ses points d'abscisse nulle. Cette partie ne demande, pour pouvoir être traitée, que la connaissance de la définition de la transformation de Descartes. On y montre que cette transformation permet de créer des courbes dont une équation annule un polyn ?ome de degré quelconque, ce qui était l'un des objectifs poursuivis par Descartes lui-même au moment de la rédaction de son livre La Géométrie, paru en 1637.

1. Soit f une fonction polynomiale réelle de degrés p Π 1 et q Π 1 par rapport à deux variables x et y, telle que tout point de ' vérifie f(x, y) = 0. Déterminer une fonction polynomiale non nulle g telle que g(x, y) = 0 est une équation cartésienne de la transformée de Descartes C de '.
2. étudier le même problème en échangeant les r ?oles de C et de '.
3. Déterminer une fonction polynomiale g convenable dans le cas où f(x, y) = y ? x2. Peut-on en obtenir une autre, de degré inférieur, par division de g par un polyn ?ome de la forme ax + b avec (a, b)
4. Appliquer le résultat de la question 5.1 au cas particulier faisant l'objet de la première partie.
5. Soit : f(x, y) = n m=v m k=0 fm,kxm ?kyk une fonction polynomiale réelle de degrés respectifs p Π 1 et q Π 1 par rapport à x et y. On notera qu'il existe donc un m et un k tels que fm,qfp+k,k = $0alorsque, pourtoutm, fm, k = 0sik >$
$qouk < m?p.Onditquefestdedegrénetdevaluationvlorsqu'ilexisteaumoinsunketunhtelsquefr$
0. Soit (un réel donné non nul. On note "(x, y) la fonction rationnelle définie par : "(x, y) = f $x?(, yx(x?().Montrerqu'ilexisteunentierrcomprisentre0etqtelquelafonctiongdéfi$
$xr"(x, y)soitpolynomiale.Danslasuitedecettepartie, restsupposéminimal.Montrer, parexemple$
$(x+()byqoùaetbsontdesentierspositifsounulsdonnés, quel'onpeutavoirrégalàn'importequeler$

6. Déterminer l'entier maximal s Π 0 tel que la fonction F = TΠ(f) définie par : F(x, y) = (x ? () ?sg(x, y) soit polynomiale. Montrer que, si r Π 1, alors F(0, 0) = 0.
7. Calculer en fonction de (n, v, r) le degré N de la fonction polynomiale F. Démontrer l'inégalité N " 2n, et donner un exemple, où n est un entier donné strictement positif, tel que l'égalité soit atteinte.
8. Calculer N pour f(x, y) = xa + (x + ()qyq où a est un entier positif ou nul donné, et vérifier dans ce cas l'inégalité N Π n 2 · Montrer que, pour tout entier n strictement positif et tout entier m compris entre la partie entière de n + 1 2 et n, il existe une fonction polynomiale f telle que N = m.
9. Montrer que, si $f(x\ ;\ y)$ n'est pas le produit d'une fonction polynomiale de la forme x + k par une fonction polynomiale, il existe un réel non nul ? tel que : f = T ?(F) = T ? ' TΠ(f) = TΠ ' T ?(f). Que peut-on en déduire pour N ?
10. Déterminer les fonctions polynomiales f telles que TΠ(f) = f.