∽ CAPLP externe 2014 et CAFEP ∾

Durée : 5 heures

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants.
Le premier exercice est un test vrai-faux avec justification.
Le second exercice présente une application des probabilités à la génétique afin d'étudier la descendance par autofécondation d'une plante hétérozygote.
Le troisième exercice présente une étude partielle du problème de Bâle consistant à justifier l'existence, puis à indiquer une méthode de calcul de la somme :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}.$$

Dans toute la suite, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

Exercice 1

Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse. Chaque réponse devra obligatoirement être justifiée.

1. L'espace est rapporté à un repère orthonormé.
   Soient P le plan d'équation $2x-2y+z-1=0$ et D la droite passant par les points $\text{A}(0~;~0~;~-1)$ et $\text{B}(-2~;~2~;~-2)$.
   La droite D est parallèle au plan P.
2. Il existe au moins un entier relatif k tel que $\left(\sqrt{3}\text{i}-1\right)^k$ soit un nombre imaginaire pur.
3. Pour tout réel x, $\text{e}^x \geqslant \text{e}x$.
4. Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, a et b deux réels positifs tels que $a<b$.
   Si pour tout réel positif x, $f'(x)\leqslant g'(x)$, alors $f(b)-g(b)\leqslant f(a)-g(a)$.
5. Soit (u_n) une suite telle que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}-u_n>0,1$.
   La suite (u_n) tend vers $+\infty$.
6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\displaystyle\int_1^x \text{e}^{-t^2}\,\text{d}t$.
   La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1

Introduction

Pour un gène donné, une plante possède toujours deux allèles.
Dans les cas les plus simples, chaque allèle est noté **A** ou **a**.

— Une plante est **homozygote** lorsqu'elle contient les deux mêmes allèles : elle est alors de génotype **AA** ou **aa**. Une plante est **hétérozygote** lorsqu'elle contient deux allèles différents : elle est alors de génotype **Aa** ou **aA**.

Chaque plante reçoit au hasard et de manière indépendante un allèle de chacun de ses parents.
Cependant, certaines plantes comme le lupin, se reproduisent par autofécondation : tout se passe pour la descendance comme si on fécondait deux plantes de même génotype, chaque allèle étant sélectionné au hasard.

Par exemple, une plante homozygote de génotype **AA** donne par autofécondation uniquement des descendants de génotype **AA**.
L'objectif de ce problème est l'étude de la descendance par autofécondation d'une plante hétérozygote.
Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie 1

1. Déterminer les probabilités qu'après autofécondation, la descendance de première génération d'une plante de génotype **Aa** soit :

a. une plante de génotype **AA**

b. une plante de génotype **aa**

c. une plante hétérozygote.

2. On simule la première descendance par autofécondation d'une plante hétérozygote par l'algorithme suivant (les lignes 32, 33 et 34 sont incomplètes) :

```
1   VARIABLES
2   n EST DU TYPE NOMBRE
3   freq1 EST_DU_TYPE NOMBRE
4   freq2 EST_DU _TYPE NOMBRE
5   freq3 EST_DU_TYPE NOMBRE
6   i EST DU TYPE NOMBRE
7   x EST DU TYPE NOMBRE
8   y EST_DU_TYPE NOMBRE
9   DÉBUT ALGORITHME
10  AFFICHER « Combien de simulations désirez-vous effectuer ? »
11  LIRE n
12  freq1 PREND_LA _ VALEUR 0
13  freq2 PREND_LA _VALEUR 0
14  freq3 PREND_LA _VALEUR 0
15  POUR i ALLANT DE 1 À n
16  DÉBUT POUR
17  x PREND_LA _ VALEUR floor(2 *random())
18  y PREND_LA _ VALEUR floor(2 *random())
19  SI (x + y == 0) ALORS
20  DEBUT SI
21  freq1 PREND_LA _ VALEUR freq1 + 1
22  FIN SI
23  SI (x + y == 1) ALORS
24  DÉBUT SI
25  freq2 PREND_LA _ VALEUR freq2 + 1
26  FIN SI
27  SI (x + y == 2) ALORS
28  DÉBUT SI
29  freq3 PREND_LA _VALEUR freq3 + 1
30  FIN SI
31  FIN POUR
32  freq1 PREND_LA _ VALEUR ....
33  freq2 PREND_LA _ VALEUR ....
34  freq3 PREND_LA_ VALEUR ....
35  AFFICHER freq1
36  AFFICHER freq2
37  AFFICHER freq3
38  FIN ALGORITHME
```

La commande *floor(x)* donne la partie entière de x. La commande *random()*

donne un nombre réel que l'on considérera comme aléatoire appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1[$.

a. Que simulent les lignes 17 et 18 de l'algorithme ?

b. Les lignes 32, 33 et 34 sont incomplètes, les parties manquantes ont été remplacées par des points de suspension.

Recopier et compléter la ligne 32, la ligne 33 et la ligne 34 de l'algorithme pour que les variables freq1, freq2 et freq3 mesurent les fréquences respectives d'apparition au cours de la simulation des plantes de génotype **AA**, hétérozygote et de génotype **aa**.

c. Cet algorithme permet-il de retrouver les résultats de la question 1 ? Argumenter.

3. On suppose que deux personnes ont effectué une étude statistique afin d'obtenir une fréquence du génotype **Aa** dont on sait que la proportion théorique est de $0,5$. Le premier a travaillé avec une population de $10\,000$ plantes et obtenu une fréquence de $0,488$. Le second a travaillé avec une population de $2\,500$ plantes et obtenu une fréquence de $0,481$.

Déterminer, pour chacune des deux études, un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

Ces résultats vous incitent-ils à mettre en doute le sérieux de chacune de ces études ?

Partie II

Soit une plante hétérozygote à la génération 0, qui se reproduit par autofécondation d'une génération à l'autre. Dans toute la suite, n désigne un entier naturel.
On note :

- E_n l'évènement « La plante de la n-ième génération est de génotype AA »,
- F_n l'évènement « La plante de la n-ième génération est hétérozygote, c'est-à-dire de génotype **Aa** ou **aA** »,
- G_n l'évènement « La plante de la n-ième génération est de génotype **aa** »,
- x_n la probabilité de l'évènement E_n que l'on écrira $x_n = P(E_n)$,
- y_n la probabilité de l'évènement F_n que l'on écrira $y_n = (F_n)$,
- z_n la probabilité de l'évènement G_n que l'on écrira $z_n = P(G_n)$.

1. Que valent x_0, y_0, z_0 ?

2. **a.** Calculer x_1, y_1, z_1 puis x_2, y_2, z_2.

b. Montrer que $x_3 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$.

c. Conjecturer l'expression de x_n en fonction de n, n entier naturel non nul.

d. Conjecturer les expressions de y_n puis z_n en fonction de n, n entier naturel non nul.

Partie III

Cette partie a pour objectif la démonstration des conjectures établies lors de la partie précédente, à l'aide du calcul matriciel. Les notations de la partie II sont conservées.
Dans cette partie, on note $P_B(A)$ la probabilité de réalisation de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé ; A et B étant deux évènements d'un même espace probabilisé.

1. Calculer les probabilités conditionnelles suivantes : $P_{E_n}(E_{n+1})$, $P_{F_n}(E_{n+1})$, $P_{G_n}(E_{n+1})$.

2. En déduire que pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = x_n + 0,25y_n$.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $y_{n+1} = 0,5y_n$ et $z_{n+1} = 0,25y_n + z_n$.

4. Pour n entier naturel, on note $P_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $P_{n+1} = AP_n$, où A est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on déterminera.

5. En déduire que pour tout n entier naturel, $P_n = A^n P_0$.

6. On souhaite montrer qu'il existe une matrice diagonale semblable à la matrice A.

a. On admet que la matrice $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $S = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.
Déterminer S^{-1}.

b. On considère la matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer la matrice SBS^{-1}.

7. Démontrer que pour tout n entier naturel, $P_n = SB^n S^{-1} P_0$.

8. En déduire que pour tout n entier naturel, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5^{n+1} + 0,5 \\ 0,5^n \\ -0,5^{n+1} + 0,5 \end{pmatrix}$.

9. Que se passe-t-il à long terme pour l'évolution de la plante originelle étudiée ?

10. À partir de combien de générations, peut-on considérer à 10^{-4} près, que la plante obtenue soit homozygote ?

Exercice 3

Partie 1 : Quelques résultats sur la fonction cotangente

On définit la fonction cotangente notée cotan de la façon suivante :
pour tout réel x tel que $\sin(x) \neq 0$, $\text{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Quel est l'ensemble de définition, que l'on notera D, de la fonction cotan ?

2. Justifier que la fonction cotan est dérivable sur D et vérifier que, pour tout x réel appartenant à D, on a :

$$\text{cotan}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \text{cotan}^2(x).$$

3. Établir que la fonction cotan est périodique de période π puis étudier sa parité.

4. a. Donner, en justifiant, le tableau de variations de la fonction cotan sur l'intervalle $]0\,;\,\pi[$.
On y fera figurer les limites aux bornes de l'intervalle $]0\,;\,\pi[$. *Les calculs de ces limites devront être justifiés.*

b. Tracer la courbe représentative de la fonction cotan sur l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi[$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.

c. Montrer que sur $]0\,;\,\pi[$, la courbe possède un point d'inflexion et préciser l'équation réduite de la tangente en ce point.

5. Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$: $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$.

6. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\text{cotan}^2(x) \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1+\text{cotan}^2(x).$$

Partie II : Résolution d'une équation polynômiale

Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(x) = (x+\text{i})^5 - (x-\text{i})^5$$

où i désigne le nombre complexe tel que $\text{i}^2 = -1$.

1. Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ et l'équation $\left(\dfrac{x+\text{i}}{x-\text{i}}\right)^5 = \text{i}$ ont le même ensemble de solutions.

2. **a.** Montrer que les solutions de l'équation $\left(\dfrac{x+\text{i}}{x-\text{i}}\right)^5 = 1$ sont les nombres complexes $x_k = \text{i}\dfrac{\text{e}^{\frac{2\text{i}k\pi}{5}}+1}{\text{e}^{\frac{2\text{i}k\pi}{5}}-1}$ pour $k \in \{1,2,3,4\}$.

b. Justifier que, pour $k \in \{1,2,3,4\}$: x_k est réel et $x_k = \text{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{5}\right)$.

c. Déterminer une fonction polynôme Q de degré 2 à coefficients réels telle que pour tout nombre complexe x, $P(x) = 2\text{i}Q\left(x^2\right)$.

3. **a.** On considère a et b deux réels distincts appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que :

$$\text{cotan}^2(a) \neq \text{cotan}^2(b).$$

b. En déduire que x_1^2 et x_2^2 sont deux solutions distinctes de l'équation $Q(x) = 0$.

c. En utilisant la somme des racines du trinôme $Q(x)$, montrer que :

$$\text{cotan}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\text{cotan}^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2.$$

4. Déterminer la valeur exacte de $\text{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right)$ puis en déduire que :
$\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}}$.

5. On souhaite généraliser l'étude précédente afin de démontrer le résultat suivant : pour tout entier naturel n non nul, n

$$\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{2n(2n-1)}{6} \qquad (*)$$

a. Soit la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ par

$$P(x) = (x+\text{i})^{n+1} - (x-\text{i})^{2n+1}.$$

On admet que l'équation $P(x) = 0$ admet $2n$ solutions distinctes que l'on notera $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pour $k \in \{1,2,\ldots,2n\}$, donner sans justification l'expression de x_k qui permet de retrouver, pour $n = 2$, les résultats de la question II. 2. b.

b. Montrer que $P(x) = 2\text{i}Q\left(x^2\right)$ où $Q(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{2n+1}{2p+1}x^{n-p}$.

c. On admet que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$, x_k est un nombre réel.
Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, x_k^2 est solution de l'équation $Q(x) = 0$.

d. Montrer que pour tout couple d'entiers $(l, m) \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$l \neq m \Rightarrow x_i^p 2 \neq x_m^2.$$

(on pourra utiliser la stricte monotonie de la fonction $x \longmapsto \text{cotan}^2(x)$ sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \frac{\Pi}{2}\right[$).

e. Déterminer la somme des racines du polynôme Q. On justifiera le résultat.

f. En déduire la relation (*).

Partie III : Étude d'une suite

On définit pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{n}.$$

1. À l'aide d'un tableur, on établit les résultats ci-dessous. En utilisant les résultats fournis, donner la valeur arrondie à 10^{-3} près de S_{10} et T_{10}.
Émettre une conjecture sur la nature des suites (S_n) et (T_n), qui, une fois établie, permettra de conclure sur la convergence de ces suites.

	A	B	C	D
1	n	S_n	T_n	$S_n - S_n$
2	1	1	2	1
3	2	1,25	1,75	0,5
4	3	1,361 111 1	1,694 444 4	0,333 333 3
5	4	1,423 611 1	1,673 611 1	0,25
6	5	1,463 611 1	1,663 611 1	0,2
7	6	1,491 388 9	1,658 055 6	0,166 666 7
8	7	1,511 797 1	1,654 654 2	0,142 857 1
9	8	1,527 422 1	1,652 422 1	0,125
10	9	1,539 767 7	1,650 878 8	0,111 111 1
11	10	1,549 767 7	1,649 767 7	0,1
12	11	1,558 032 2	1,648 941 3	0,090 909 1
13	12	1,564 976 6	1,648 31	0,083 333 3

2. Déterminer le sens de variation des suites (S_n) et (T_n) puis établir leur convergence en citant avec précision le théorème utilisé.

3. **a.** En utilisant les résultats de la partie I et la relation (*) de la partie II, établir le résultat suivant :
pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left(\frac{2n(2n-1)}{6}\right) \leqslant \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left(n + \frac{2n(2n-1)}{6}\right).$$

b. En déduire la valeur exacte de :

$$\sigma = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n^2}.$$

c. Justifier que pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n < \sigma < T_n.$$

4. Déterminer un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n \geqslant N$:

$$|S_n - \sigma| < 10^{-2}.$$

4. a. Soit p un entier naturel non nul. Écrire en langage naturel un algorithme permettant de calculer le p-ième terme de chacune des deux suites (S_n) et (T_n).

b. À l'aide de la calculatrice, utiliser cet algorithme ou tout autre procédé pour donner la valeur approchée de σ à 10^{-2} près par défaut.