ൟ CAPLP Concours externe et CAFEP ൟ
Section : Mathématiques – Physique–Chimie Session 2022

Durée : 4 heures

PARTIE 1 : MATHÉMATIQUES

La partie Mathématiques est constituée de deux exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Le premier exercice est constitué de quatre parties.
Le deuxième exercice est un vrai faux avec justification.

Exercice 1

Dans cet exercice f désigne la fonction définie, pour x réel, par

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction [,
2. **a.** Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et que $f'(x) = \dfrac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

   b. Donner le tableau complet de variations de f (on justifiera les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$).

   c. Déterminer les droites asymptotes à $\mathcal{C}_f$.

   d. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ sur la copie.
   La figure pourra, selon besoin, être complétée dans la suite de cette partie.
3. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un axe de symétrie qui admet une équation de la forme $x = k$.
4. Déterminer une équation de la droite T tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection, noté A, de la droite T avec l'axe des abscisses.
6. Déterminer une équation de la droite passant par les points A et B, où B est le point de coordonnées $(1\ ;\ -2)$.
7. Donner une équation de la droite d orthogonale à la droite (AB) et passant par B.
8. On note C le point d'intersection de la droite d avec l'axe des ordonnées.
   Déterminer l'aire du triangle (ABC) en unité d'aire.

Partie B : Calcul intégral

9. **a.** Déterminer les réels α et β tels que, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$,

$$\frac{x}{x^2+x} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{1+x}.$$

b. En déduire une primitive de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

10. Vérifier que la fonction F définie, pour $x \in]0\,;\,+\infty[$, par

$$F(x) = -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

11. Déterminer le réel $m > 0$ tel que

$$\int_m^4 f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Partie C : Équations différentielles

Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$h(x) = x\sin(x).$$

12. Déterminer les primitives de h sur $]0\,;\,+\infty[$.

13. **a.** Résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle

$$y' + \frac{y}{x^2+x} = 0.$$

b. Résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle

$$y' + \frac{y}{x^2+x} = (x+1)\sin(x) \qquad (E)$$

c. Déterminer la solution u de l'équation différentielle (E) telle que $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Partie D : Étude d'une suite définie par récurrence

14. Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$.

15. Montrer que $\ell \in \left[\frac{1}{2}\,;\,,1\right]$.

16. **a.** On considère le code Python suivant :

```
def g(x) :
    return 1/(x**2+x)-x

def dichotomie(eps) :
    x=0.5
    y=1
while y-x>=2*eps :
        c=(x+y)/2
        if g(c) > 0 :
            x=c
    else :
            y=c
    return (x+y)/2
```

Exécuter « à la main « la commande suivante en détaillant itération par itération les valeurs prises par les variables x, y et c ainsi que le résultat final obtenu :
>>> dichotomie(0.05)

17. Expliquer ce que représente le résultat obtenu à la question précédente dans le contexte de l'exercice.

18. Justifier que, pour toute valeur strictement positive de eps, la boucle while du programme s'arrête au bout d'un nombre fini d'itérations.

19. Soit φ :]0 ; $+\infty$[la fonction définie par : $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $\varphi(x) = f \circ f(x) - x$.

a. Calculer $\varphi(\ell)$.

b. Établir le tableau de signe de φ sur $]0\,;\,+\infty[$.

On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_0 et par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

20. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est bien définie si et seulement si $u_0 \in \mathcal{D}_f$.

21. On suppose dans cette question que $u_0 \in]0\,;\,+\infty[$.

a. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

b. Montrer que les sous-suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont monotones.

c. Étudier la convergence de la suite (u_n) en fonction de u_0.

22. On suppose dans cette question que $u_0 \in \mathcal{D}_f \cap]-\infty\,;\,0]$. Étudier la convergence de la suite (u_n) en fonction de u_0.

Exercice 2

Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. La population d'une ville a augmenté de 10 % en quatre ans.

Proposition. On peut dire que la population de cette ville a augmenté de 2,5 % par an en moyenne.

2. Soit f la fonction définie, pour tout réel x non nul, par

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}.$$

Proposition. La fonction f tend vers 1 quand x tend vers 0.

3. Soit n un entier naturel non nul.

Proposition. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. Une urne contient six boules bleues et trois boules rouges.

On prélève simultanément deux boules dans l'urne. Tous les prélèvements sont supposés équiprobables.

Proposition. La probabilité que les deux boules soient de couleurs différentes est égale à $\dfrac{1}{2}$.

5. Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes et suivent respectivement les lois normales $\mathcal{N}(24\,;\,4)$ et $\mathcal{N}(20\,;\,2)$ (on rappelle que l'on note $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$ la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ).

On admet que la variable aléatoire $Z = X + Y$ suit une loi normale.

Proposition. L'espérance mathématique et l'écart type de Z sont respectivement 44 et 6.

6. Pour tout réel θ, on considère la matrice $M(\theta) = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$.

   Proposition. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M(\theta)^4 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

7. Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on considère les points A(0 ; 1) , B(0 ; 2) et C(1 ; −1).

   On note G le barycentre du système(A ; 1) ; (B ; -1) ; (C ; 2).

   Proposition. Les coordonnées du point G sont (2 ; −3).

8. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère :

   — la sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 3$;

   — la droite D passant par le point A de coordonnées (−1 ; 1 ; 0) et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (1 ; 0 ; 1).

   Proposition. La droite D est tangente à la sphère S.

DOCUMENT RÉPONSE PARTIE MATHÉMATIQUES