CAPLP Concours externe Option mathématiques (bac + 5)
26 mars 2026 épreuve 1

ÉPREUVE ÉCRITE DISCIPLINAIRE 5 h

La partie Mathématiques est constituée de deux exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Le premier exercice est un vrai faux avec justification. Le deuxième exercice est constitué de quatre parties.

Exercice 1 :

Pour chacune des propositions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.
   Proposition : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. On considère dans un repère orthonormé les points A(2 ; 4), B(1 ; 1) et C(7 ; -1) et le point D barycentre des points pondérés (A ; 1),(B ; -1),(C ; 1).
   Proposition : Les diagonales du quadrilatère ABCD sont de même longueur.
3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.
   Proposition : f est dérivable sur $]3\,;\,+\infty[$.
4. On dispose d'une pièce truquée telle que la probabilité d'obtenir « Face » vaut $\dfrac{1}{3}$.
   On lance 10 fois de suite et de façon indépendante cette pièce.
   Proposition : La probabilité d'obtenir au moins une fois « Face » au cours des 10 lancers est supérieure à 0,95.
5. On dispose de 200 tuyaux cylindriques identiques que l'on dispose de la manière suivante : on constitue sur le sol, entre 2 butées, une première rangée de 20 tuyaux se touchant. Sur cette première rangée sont placés 19 tuyaux reposant chacun sur deux tuyaux de la rangée précédente. On constitue ensuite sur celle-ci une nouvelle rangée de tuyaux disposés de la même manière et ainsi de suite.
   Proposition : Il est possible de stocker en un seul tas l'ensemble des tuyaux en procédant ainsi.
6. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$ où x est un nombre réel.
   Proposition : La matrice M est inversible.
7. Une société d'assurance estime que la valeur d'un appareil électroménager qu'elle assure diminue de 15 % par an (perte de valeur appelée vétusté).
   Proposition : Au bout de 5 ans, un appareil aura perdu plus de la moitié de sa valeur d'achat.
8. On considère l'équation différentielle
   $(E) : \quad y'' - 4y' + 4y = 0$
   Proposition : Toute solution de (E) sur $\mathbb{R}$ s'annule en 0.

9. On considère une série statistique de moyenne m.
Proposition : Si on double tous les effectifs de cette série alors sa moyenne double aussi.

10. Soit le nombre complexe $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{i}$. Dans le plan complexe, on considère les points M, N et P d'affixes z, z^2 et z^4.
Proposition : Les points M, N et P sont alignés.

Exercice 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormal

Partie I : Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer la limite de f en 0.
2. **a.** Justifier que la droite D d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
   b. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite D sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. **a.** Calculer la dérivée de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et étudier son signe sur cet intervalle.
   b. Donner le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $h \neq -1$. Rappeler la valeur de la somme

$$\sum_{i=0}^{n} (-h)^p.$$

   b. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1}{1+h}$ puis celui de $\ln(1+h)$ à l'ordre 2 en 0.
   c. En déduire le développement limité à l'ordre 2 en 1 de f.
5. **a.** On note T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   Donner l'équation réduite de T.
   b. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
6. **a.** On pose $A(t) = \dfrac{\ln^2(t)}{2}$ sur $]0\,;\,+\infty[$. Montrer que pour tout $t > 0$: $\quad A'(t) = \dfrac{\ln(t)}{t}$.
   b. Montrer que la valeur de l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1 x e t$x = \$e vaut $\text{e} - \dfrac{1}{2}$.

Partie II : On souhaite, dans cette partie, résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$(R) \quad y' + \frac{1}{t}y = \frac{1}{t^2}$$

7. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) \quad y' + \dfrac{1}{t}y = 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

8. Montrer que la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = \dfrac{\ln(t)}{t}$ est solution de (E).

9. Montrer que les solutions de (E) sur $]0\,;\,+\infty[$ sont les fonctions $t \longmapsto \dfrac{\ln(at)}{t}$ où a est un réel strictement positif.

Partie III : On rappelle que f est la fonction définie dans la partie I.

10. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\,;\,+\infty[$. On notera α cette solution.

On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$f_n(x) = x - nf(x)$$

11. Déduire de la question précédente que les courbes représentatives des fonctions f_n et f_{n+1} admettent un unique point d'intersection dont on précisera les coordonnées.

12. On remarque que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$ et on définit deux suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

- $a_0 = \dfrac{1}{2}$ et $b_0 = 1$
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$

avec : si $f(a_k)f(c_k) < 0$, $\quad a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$

sinon, $\quad a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$.

On admet que les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent et ont pour limite commune α.

a. Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $a_k < \alpha < b_k$.

b. Compléter les pointillés dans le programme suivant pour que la fonction `approx` renvoie un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à eps :

```
from math import log
def approx(eps) :
  a=................................
  b=................................
  while abs(b-a)>eps :
    c=(a+b)/2
    if ............................
      b=c
    else :
.         ..........................
  return (a,b)
```

c. Quelle valeur doit-on donner à eps pour obtenir un encadrement de α à 10^{-2} ?

d. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

Partie IV :

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction h_n définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$h_n(x) = x^2 - n(1 - \ln(x))$$

13. Donner le tableau de variations de la fonction h_n sur $]0\ ;\ +\infty[$.

14. Montrer que l'équation $h_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\ ;\ +\infty[$ que l'on note x_n.

15. En déduire le tableau de variations de f_n. On y fera figurer x_n.

16. Justifier que pour tout $n \geqslant 2,\ 1 < x_n < \text{e}$.

17. Montrer que pour tout $n \geqslant 2,\ h_n(x_{n+1}) > h_n(x_n)$.

18. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante et qu'elle est convergente.

19. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers e.

20. **a.** Donner un équivalent de la fonction $x \longmapsto \text{e}^x - 1$ en 0.

b. En déduire un équivalent de la suite $(x_n - \text{e})_{n\geqslant 2}$ en $+\infty$. en $+\infty$.