CAPLP Concours externe Option mathématiques
26 mars 2026 épreuve 1

ÉPREUVE ÉCRITE DISCIPLINAIRE

PARTIE 1 : Commune à tous les candidats — 10 points

Exercice 1 (VRAI-FAUX)

Préciser si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On a $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}$.
2. Un argument de $1-\imath\sqrt{3}$ est $-\dfrac{\pi}{3}$.
3. Toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y''-3y'+2y=0$ tend vers 0 en $-\infty$.
4. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. Soit une série statistique à une variable prenant n valeurs réelles et de moyenne m ; si $n-1$ d'entre elles forment une série statistique de moyenne m alors la n-ième est égale à m.
5. La courbe de la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2|x|-1}-1$ admet, au point d'abscisse -1, une tangente d'équation $y = \left(2\,\mathrm{e}^2\right)x + \left(3\,\mathrm{e}^2-1\right)$.
6. On lance simultanément deux dés à 6 faces, numérotées de 1 à 6, équilibrés et on considère la somme obtenue en ajoutant les deux nombres figurant sur les faces supérieures ; la probabilité que cette somme soit inférieure ou égale à 9 est égale à 0,75.
7. Le prix d'installation de panneaux photovoltaïques a augmenté de10 % au 1er janvier 2023, de 5 % aux 1er janvier 2024 et 2025 puis enfin de 10 % à nouveau au 1erjanvier 2026.

   Le taux moyen d'évolution sur ces quatre années est 7,5 %.
8. Soit n un entier naturel non nul, on a :
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0.$$
9. Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est telle que A^2 est nulle alors A est nulle.
10. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}*$ par la relation de récurrence $u_{n+1} = -2u_n + 1$ converge.

Exercice 2 (Quelques séries remarquables)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n.$$

PARTIE A - ÉTUDES D'EXEMPLES

On se propose d'étudier la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour quelques suites particulières $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. Dans cette question uniquement, on pose $u_k = \dfrac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   a. Soit $n \geqslant 1$. Donner, pour tout entier k vérifiant $n+1 < k < 2n$, un encadrement de $\dfrac{1}{k}$.

   b. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

   c. Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, quelle est la limite de $(S_{2n} - S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? Conclure.

2. Dans cette question uniquement, on pose $u_k = \dfrac{1}{k^2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   a. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{k^2}.$$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $S_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$ puis que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

   c. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

3. Dans cette question uniquement, on pose $u_, = q^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ où q est un nombre réel.

   a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer S_n, suivant les valeurs de q.

   b. Calculer, si elle existe, la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en suivant les valeurs de q.

PARTIE B - PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

4. **a.** Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. Exprimer $S_n - S_{n-1}$ en fonction de u_n.

   b. En déduire que la condition $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ est nécessaire pour la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}*}$. Est-elle suffisante ? Justifier.

On suppose par la suite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est une suite à termes strictement positifs et qu'il existe un réel $0 \leqslant q \leqslant 1$ tel que :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = q.$$

5. Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant q < 1$.

   a. Montrer que :

$$0 \leqslant q < \frac{q+1}{2} < 1.$$

   b. Soit (v_n) une suite réelle. Rappeler la définition à l'aide de quantificateurs de :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = q.$$

c. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout $k \geqslant N$:

$$0 \leqslant \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \frac{q+1}{2}$$

(La détermination de N n'est pas attendue).

d. Montrer, par récurrence sur k, que pour tout $k \geqslant u_k \leqslant N$, on a :

$$u_k \leqslant u_N \left(\frac{q+1}{2}\right)^{k-N}$$

e. En déduire une majoration indépendante de n, pour tout $n \geqslant N$, de $\sum_{k=N}^{n} u_k$.

f. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est convergente. On pourra remarquer que, lorsque $N > 1$, on peut écrire pour tout $n \geqslant 2$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} u_k.$$

6. Dans cette question, on suppose que $q = 1$. Que peut-on dire quant à la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
On pourra considérer les suites étudiées en Partie A.1 et Partie A.2.

Partie 2 - Majeure mathématiques 10 points

(à traiter uniquement par les candidats ayant choisi la discipline majeure mathématiques)

Exercice 3 (Étude de la diagonalisabilité d'une matrice 3×3)

Soit une matrice

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}$ dont la matrice est M dans la base canonique de $\mathbb{R}$.

1. Déterminer le noyau de φ. L'endomorphisme φ est-il bijectif?

2. Calculer le déterminant de M.

3. Justifier que la matrice M est inversible. Montrer que :

$$M^{-1} = -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 15 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

4. On définit la trace d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ par :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i\,i}.$$

a. Montrer que pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B).$$

b. Montrer que, pour toutes matrices $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathrm{tr}\left(P^{-1}\ AP\right) = \mathrm{tr}(A).$$

5. Calculer $\mathrm{tr}(M)$.

6. Justifier que le vecteur $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à une valeur propre λ_1 à déterminer puis déterminer la dimension du sous-espace propre associé à λ_1.

7. On suppose que M est diagonalisable. En utilisant la trace et le déterminant de M, obtenir une somme et un produit des valeurs propres possibles de M. Quelles seraient les valeurs propres possibles de M ?

8. Justifier que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Un problème de recollement)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

PARTIE A - ÉTUDE DE LA FONCTION *f*

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$, puis à gauche et à droite en 0.

2. Étudier les variations de la fonction f et les limites aux bords de l'ensemble de définition.

Préciser la nature des branches infinies de la courbe représentative de f.

PARTIE B - UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E) : \quad x^2 y' + (2x - 1) y = 0$$

sur $\mathbb{R}$ dont les solutions sont les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation donnée par (E).

3. Résoudre (E) sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$.

4. Supposons que y est une solution de (E) sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sur $]-\infty\ ;\ 0[$ prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$.

a. Que vaut $y(0)$?

b. Justifier que si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ \dfrac{k}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

c. Montrer que les solutions définies en **4. b.** sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et en déduire l'ensemble des fonctions solutions de (E) définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

PARTIE C - ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

5. Exprimer, pour tout réel non nul x, y' en fonction de y et x. Montrer que les solutions de (E) sont de classe $\mathscr{C}_2$?

6. Justifier que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ admettent un développement limité à l'ordre 2 en 0 de partie régulière nulle.

7. Peut-on généraliser le résultat à tout ordre $n \in \mathbb{N}$?

Partie 3 – Mineure mathématique 10 points

à traiter uniquement par les candidats ayant choisi la discipline majeure physique-chimie

Exercice 3 (Étude d'une matrice 3×3 et application)

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On définit les puissances successives de A par $A^0 = I_3$(où I_3 est la matrice unité définie ci-dessus) et pour tout $n \in N$, $A^{n+} = A^n \times A$.

1. Déterminer l'ensemble E_2 des matrices colonnes à coefficients réels $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telles que $AM = 2M$.

2. Déterminer l'ensemble E_4, des matrices colonnes à coefficients réels $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telles que $AM = 4M$.

3. On considère alors la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Justifier que P est inversible et que $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

5. En déduire que, pour tout $n \in N$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n + 4^n & 0 & 2^n - 4^n \\ 2(4^n - 2^n) & 2 \times 4^n & 2(4^n - 2^n) \\ 2^n - 4^n & 0 & 2^n + 4^n \end{pmatrix}.$$

7. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies de manière récurrente par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et $w_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 3u_n \qquad\quad - w_n \\ u_{n+1} & = & 2u_n + 4v_n + 2w_n \\ w_{n+1} & = & -u_n \qquad\quad + 3w_n \end{array}\right.$$

et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X^{n+1} en fonction de X^n et A.

8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

9. Utiliser ce qui précède pour déterminer l'expression des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Exercice 4 (Autour du nombre e)

PARTIE A - CALCUL INTÉGRAL

1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$, par :

$$f(t) = \frac{1}{t(t+1)^2}$$

a. Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(t) = \frac{a}{(t+1)^2} + \frac{b}{(t+1)} + \frac{c}{t}.$$

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(t) = -\frac{1}{t^2(t+1)}.$$

a. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g(t) - f(t) = -\frac{2t+1}{\left(t^2+1\right)^2}$$

b. Vérifier que la fonction h définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, par $h(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$, est une primitive de la fonction $g - f$sur $\mathbb{R}_+^*$.

PARTIE B - LIMITES DE FONCTIONS ET INÉGALITÉS

3. Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 1$. On définit, pour tout $x > n$:

$$F_n(x) = \int_n^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad G_n(t) = \int_n^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

a. Montrer que, pour tout $x > n$:

$$F_n(x) = \frac{n-x}{(n+1)(x+1)} + \ln\left(\frac{(n+1)x}{n(x+1)}\right)$$

b. i. Déterminer, en fonction de n, la limite, lorsque x tend vers $+\infty$, de la fonction F_n. On notera v_n cette limite.

ii. Justifier que, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant v_n$.

iii. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$1 \leqslant (n+1) \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

c. En utilisant la primitive obtenue à la question **2. b.** de la Partie A, donner l'expression de $G_n(x)$.

d. i. Déterminer, en fonction de n , la limite, lorsque x tend vers $+\infty$, de la fonction G_n. On notera v_n cette limite.

ii. Justifier que, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant v_n$.

iii. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$n \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant 1$$

PARTIE C - ÉTUDE D'UNE SUITE

4. À partir des deux inégalités établies dans la Partie B, montrer que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$1 \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leqslant 1 + \frac{1}{n}.$$

5. En déduire que la suite $\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite, lorsque n tend vers $+\infty$.