CAPLP Concours externe Option mathématiques 27 mars 2024 épreuve 1

ÉPREUVE ÉCRITE DISCIPLINAIRE

PARTIE 1 : MATHÉMATIQUES

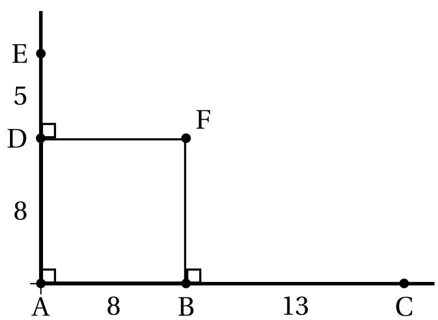
La partie mathématiques est constituée de deux exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Le premier exercice est un vrai faux avec justification.
Le deuxième exercice est constitué de cinq parties.

Exercice 1

Pour chacune des propositions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soit f une fonction continue sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $f(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
Proposition : La fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. On propose la configuration ci-contre où AB = 8, BC = 13, AD = 8 et DE = 5. Le quadrilatère ABFD est un carré.
Proposition : Les points E, F et C sont alignés.



3. On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ \pi[$ par
$f(x) = \dfrac{\cos(x) - 1}{\sin^2(x)}$.
Proposition : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(x^2 + 2x - 3\right)$.
Proposition : La fonction f n'est définie que pour $x > 1$.

3. On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = 0$.
Proposition : Toute solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est de la forme $x \longmapsto \lambda x \mathrm{e}^x$, où λ est un réel donné.

4. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & -x \\ x & 4 \end{pmatrix}$, où x est un réel.
Proposition : Si $x > 2$, alors la matrice M est inversible.

5. Dans le plan complexe, on considère les points A(2i), B($-2+3$i) et C($3+$i).
Proposition : Le triangle ABC est isocèle.

6. Soit A et B deux évènements d'un même univers Ω tels que $P(A) = 0,6$ et $P(B) = 0,5$.
Proposition : Les évènements A et B ne sont pas incompatibles.

7. Une urne contient quatre boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher. On tire trois boules de l'urne, successivement et sans remise.
Proposition : La probabilité que les deux premières boules tirées soient blanches et la troisième soit noire est 16.

8. On admet que la taille d'un homme âgé de 25 ans suit la loi normale de moyenne 175 cm et d'écart type 6 cm.

   Proposition : Parmi les hommes de 25 ans mesurant plus de 1,81 m, la proportion de ceux mesurant plus de 1,93 m est environ 1 %.

9. Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $(x-7)^2+y^2=25$. Soit $\mathscr{D}$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point A(3 ; −3).

   Proposition : La droite $\mathscr{D}$ passe par l'origine du repère.

Exercice 2

L'objectif de ce problème est de vérifier que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$$

est convergente et de déterminer sa limite.
Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on définit sur $[0\,;\,+\infty[$ la fonction polynomiale P_n par :

$$P_n(x)=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{x^k}{k}=-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\ldots-\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\frac{x^{2n}}{2n}.$$

Partie 1 : Étude de la fonction P_2

On suppose dans cette partie que $n=2$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}P_2(x)$.
2. Démontrer que pour tout réel $x\geqslant 0$, $P_2'(x)=-1+x-x^2+x^3$, puis que $P_2'(x)=(x-1)\left(x^2+1\right)$.
3. Établir le tableau de variations de la fonction P_2 sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Partie 2 : Étude des fonctions P_n

Soit n un entier naturel tel que $n\geqslant 1$.

4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}P_n(x)$.
5. Calculer la fonction dérivée de P_n et vérifier que pour tout réel $x\geqslant 0$,

$$(x+1)P_n'(x)=x^{2n}-1.$$

6. Déterminer les variations de la fonction P_n sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
7. En déduire que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $P_n(1)<0$.
8. **a.** Vérifier que pour tout réel $x\geqslant 0$ et pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,

$$P_{n+1}(x)=P_n(x)+x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

   b. En déduire que pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, $P_n(2)>0$.

9. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note E_n l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1\ ;\ +\infty[$.

a. Résoudre l'équation E_1 sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, E_n admet une unique solution sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ notée x_n et que $1 < x_n < 2$.

Partie 3 : Inégalités

10. Justifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t+1}\,\mathrm{d}t.$$

11. Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t.$$

12. En déduire que

$$\int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \ln 2.$$

13. **a.** Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 1$. Étudier les variations de la fonction g_n définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par $g_n(t) = t^{2n1} - 1 - n\left(t^2 - 1\right)$.

b. En déduire que, pour tout réel $t \geqslant 1$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$t^{2n} - 1 \geqslant n\left(t^2 - 1\right).$$

14. En déduire que, pour tout réel $x \geqslant 1$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\int_0^1 \frac{t^{2n} - 1}{t+1}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{n}{2}(x-1)^2.$$

Partie 4 : Limite de la suite (x_n)

On rappelle que la suite (x_n) est la suite définie à la partie 2, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, par $P_n(x_n) = 0$. On pose $x_1 = 2$.

15. Montrer en utilisant la question **10.** que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\int_0^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t+1}\,\mathrm{d}t.$$

16. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\int_0^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t+1}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{n}{2}\left(x_n - 1\right)^2.$$

17. Montrer en utilisant les questions **12.**, **15.** et **16.** que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2\ln 2}{n}}.$$

18. Conclure quant à la convergence de la suite (x_n) et à sa limite.

Partie 5 : Limite d'une somme

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = P_n(1)$.

19. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{t+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2n+1}.$$

20. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n}}{t+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2n+1}.$$

21. En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

22. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{-1)^k}{k}.$$

- **a.** Exprimer v_{2n} et v_{2n+1} en fonction de u_n pour tout entier $n \geqslant 1$.
- **b.** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n+1}$.
- **c.** En déduire que la suite (v_n) converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{-1)^k}{k}.$$

- **d.** Montrer, en utilisant les questions **19.** et **20.**, que pour tout $n \geqslant 1, 0 \leqslant u_n + \ln 2 \leqslant 1$.
- **e.** On souhaite obtenir une approximation à ϵ près de $\ln 2$ à l'aide la suite $(-u_n)$.
  Écrire un algorithme en langage naturel permettant d'estimer $\ln 2$ à une précision ϵ donnée.
- **f.** Déterminer le nombre d'itérations n_0 au bout duquel on est certain que $-u_{n_0}$ est une approximation de $\ln 2$ à 10^{-3} près.