CAPLP Concours externe et CAFEP

Section : Mathématiques – Physique–Chimie Session 2018

Épreuve écrite sur dossier de mathématiques

Durée : 4 heures

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre quelconque
Le premier exercice est un vrai faux avec justification.
Le deuxième exercice est constitué de deux parties dont une partie de nature pédagogique.
Le troisième exercice est constitué de cinq parties.

Exercice 1

Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Dans un repère du plan, les droites D_l et D_2 d'équations respectives $2x-3y+4=0$ et $y=\dfrac{2}{3}x-5$ sont parallèles.
2. La série statistique de modalités : 9, 8, 11, 16, 8, 14, 17, 12 a pour médiane 12.
3. Dans une ville, il y a 71 % d'habitants qui possèdent un ordinateur portable. Parmi eux 37 % ont 45 ans ou plus. De plus, 63 % des habitants de cette ville sont âgés de moins de 45 ans.
   On tire au sort un habitant de cette ville. La probabilité que cet habitant ne possède pas d'ordinateur portable et soit âgé de moins de 45 ans est de 18,27 %.
4. Il existe des suites réelles (u_n) et (v_n) telles que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n=0,\quad \lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty \quad\text{et}\quad \lim_{n\to+\infty} u_n\times v_n=+\infty.$$
5. Soit (u_n) une suite réelle sans terme nul et (v_n) la suite définie par $v_n=\dfrac{-2}{u_n}$.
   Si (u_n) est divergente alors (v_n) converge vers 0.
6. Dans une ville, le nombre de véhicules a augmenté de 25 % en 4 ans. On peut dire que le nombre de véhicules a augmenté de 6,25 % par an en moyenne.
7. Soit x un nombre réel. On a $(x-2)(x+1)=(x+1)(4x+7) \iff x=-3$.
8. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x-3|$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
9. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un nombre réel appartenant à I.
   Si $f'(x_0)=0$ alors la fonction f admet un extremum en x_0.
10. La fonction F définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^x 2\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
11. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z\overline{z}+2\mathrm{i}z+(1+2\mathrm{i})\overline{z}$ soit imaginaire pur est un cercle.

12. L'équation (E) : $2x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-2\ ;\ -1]$.

13. La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible.

Exercice 2

Cet exercice comporte deux parties : une première partie portant sur la somme de deux nombres complexes suivie d'une deuxième partie de nature pédagogique construite autour d'une activité sur la thématique « Évolution des sciences et techniques ». Cette deuxième partie nécessite les annexes suivantes fournies en fin de sujet :

Annexe 1 : Énoncé initial destiné aux élèves.
Annexe 2 : Extrait du Bulletin officiel spécial numéro 2 du 19/02/2009.
Annexe 3 - Document réponse à rendre avec la copie : Copie d'élève de l'évaluation diagnostique.

I - Somme de deux nombres complexes

1. On rappelle que, pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$.
   - **a.** Établir les formules d'Euler donnant $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ en fonction de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$.
   - **b.** Établir la formule d'addition suivante :
     $\forall \left(\varphi_1, \varphi_2\right) \in \mathbb{R}^2,\ \cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi)_2.$
   - **c.** En déduire la formule d'addition donnant $\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$.
2. Dans cette question, on note $z,\ z_1$ et z_2 les nombres complexes donnés sous forme exponentielle par
   $z = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\ z_1 = A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ et $z_2 = A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$ où $A,\ A_1,\ A_2,\ \varphi,\ \varphi_1$ et φ_2 sont des réels.
   - **a.** Somme de deux nombres complexes
     On suppose que $z = z_1 + z_2$.
     - i. Montrer que $\left\{\begin{array}{rcl} A\cos\varphi &=& A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 \\ A\sin\varphi &=& A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 \end{array}\right.$
     - ii. Exprimer $\tan\varphi$ en fonction de $A_1,\ A_2,\ \varphi_1$ et φ_2.
     - iii. Calculer A^2 en fonction de $A_1,\ A_2, \varphi_1$ et φ_2 puis en déduire A en fonction de $A_1,\ A_2$ et $\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$.
   - **b.** Représentation géométrique d'une somme
     On suppose dans cette question que $z_1 = 2\sqrt{3}$ et $z_2 = 3\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}$.
     - i. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, placer les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2, puis construire le point M d'affixe z.
     - ii. Donner avec la précision permise par le graphique la longueur $\mathrm{O}M$ en cm et l'angle φ en degré.
     - iii. Calculer A et φ.

II - Partie de nature pédagogique

L'énoncé fourni en **annexe 1**, inspiré d'un ouvrage, est destiné aux élèves de de terminale professionnelle SEN (Systèmes électroniques et numériques).

Partie A : évaluation diagnostique

Vous êtes enseignant en classe de terminale professionnelle SEN (Systèmes électroniques et numériques). Vous proposez aux élèves de terminale une évaluation diagnostique sur le chapitre de « trigonométrie 1 » du programme de première professionnelle.

1. Pour chacune des questions 1 à 4 de cette évaluation, indiquer par une phrase quelle capacité du module de « trigonométrie 1 » est évaluée.
2. En **annexe 3 - document réponse à rendre avec la copie**, vous trouvez la production d'un élève à l'évaluation diagnostique que vous avez proposée. Corriger cette production d'élève et noter les remarques et conseils que vous donneriez à cet élève, **sur ce même document réponse**.

3. Indiquer quel groupement est concerné par le module « trigonométrie 2 » du programme de terminale professionnelle, donné en **annexe 2**.
4. **a.** Une capacité du module de « trigonométrie 1 », nécessaire pour aborder le module de « trigonométrie 2 » en terminale n'est pas traitée dans cette évaluation diagnostique. Identifier cette capacité.

   b. Proposer, **sur votre copie**, une question supplémentaire à l'évaluation diagnostique figurant en **annexe 3** permettant d'évaluer la capacité identifiée à la question précédente.

   c. En quoi cette capacité est-elle utile pour aborder le module de « trigonométrie 2 » de terminale professionnelle ?

   d. Citer une connaissance du programme de terminale professionnelle qui permet de mobiliser cette capacité.

Partie B : résolution de l'exercice 1 de l'énoncé initial destiné aux élèves

Les questions ci-dessous concernent l'exercice 1 de l'énoncé initial donné aux élèves de terminale professionnelle SEN figurant en annexe l.

1. **a.** Avec la précision permise par le graphique, donner les valeurs de l'amplitude A_1 de la tension u_1 et de l'amplitude A_2 de la tension u_2.

   b. Décrire une méthode que vous donneriez aux élèves pour trouver graphiquement les valeurs de ces amplitudes.
2. **a.** À l'aide des données portées sur le graphique, calculer la valeur de la pulsation ω_1 pour la tension u_1.

   b. Indiquer précisément les étapes de résolution que vous donneriez aux élèves pour trouver cette valeur.
3. **a.** À la question 2. a. de l'**exercice 1 de l'énoncé initial** destiné aux élèves, il est indiqué que la tension u_2 a pour phase à l'origine $\varphi_2 = \dfrac{5\pi}{6}$. Comment aideriez-vous les élèves à justifier à l'aide du graphique que la valeur $\varphi_2 = \dfrac{5\pi}{6}$ est une valeur possible de la phase à l'origine de la tension u_2 ?

   b. Suite à vos explications, un élève demande si la phase à l'origine de la tension u_2 pourrait aussi être égale à $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{6}$. En vous appuyant sur les capacités et connaissances du module « trigonométrie 2 » du programme de terminale professionnelle, que pourriez-vous mettre en oeuvre pour le convaincre que cette valeur ne convient pas ?
4. Un élève vous indique qu'avec le professeur d'enseignement professionnel, en électricité, les tensions s'expriment avec un cosinus. Quelle réponse argumentée pourriez-vous apporter à cet élève ?
5. On admet que la tension u_1 a pour expression $u_(t) = 2\sqrt{3}\sin(100\pi t)$.

   Exprimer la tension $u = u_1 + u_2$ sous la forme $u(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, où A est un réel positif (on pourra utiliser les résultats de la partie I, en expliquant la démarche mise en oeuvre).

Partie C : résolution de l'exercice 2 de l'énoncé initial destiné aux élèves

Les questions ci-dessous concernent l'exercice 2 de l'énoncé initial donné aux élèves de terminale professionnelle SEN figurant en **annexe 1**.

1. Pourquoi la résolution de l'équation demandée à la question 3 se fait-elle sur l'intervalle $[0\,;\,0{,}02]$?
2. Proposer un corrigé à destination des élèves de terminale professionnelle SEN pour la question : « Résoudre l'équation $\sin\left(100\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$ sur l'intervalle $[0\,;\,0{,}02]$ ».
3. Rédiger la réponse à la question « Au bout de combien de temps, en seconde, la diode devient non passante ? » comme vous le feriez pour des élèves de terminale professionnelle SEN.

Exercice 3

Dans cet exercice, on considère les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ pour n entier naturel par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Les définitions et résultats suivants seront utiles dans la suite du problème.

- La fonction f est une densité de probabilité si f est définie sur $\mathbb{R}$, positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points, et si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.
- Soit f une densité et X est une variable aléatoire réelle.
  On dit que X a pour densité f si la fonction de répartition F de X est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$, par
  $F(x) = P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$
- Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors X admet une espérance notée $\mathrm{E}(X)$ donnée par

  $$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

  Si de plus $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors X^2 admet une espérance $\mathrm{E}\left(X^2\right)$ donnée par

  $$\mathrm{E}\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

  et X admet une variance donnée par $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - (\mathrm{E}(X))^2$.

Partie A : préliminaires

1. **a.** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant x^2 + 1$.
   b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leqslant x^2 + 1$.
   c. Soit X une variable aléatoire réelle de densité donnée f telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et une variance.
2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$,c'est-à-dire que Y a pour densité la fonction g_λ définie par $g_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$
   a. Montrer que Y admet une espérance et une variance.
   b. Montrer que l'espérance de Y est $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{1}{\lambda}$ et que la variance de Y est $\mathrm{V}(Y) = \dfrac{1}{\lambda^2}$
   c. Déterminer la fonction de répartition G de la variable aléatoire Y.
3. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire que X a pour densité la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$.
   a. Montrer que X admet une espérance et une variance.

b. Montrer que l'espérance de X est $\mathrm{E}(X) = 0$ et que la variance de X est $\mathrm{V}(X) = 1$.

Partie B : étude du cas particulier de la fonction fa

On considère la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

1. Étudier la parité de la fonction f_0.
2. Construire, en le justifiant, le tableau de variations de f_0.
3. Exprimer $f_0(x)$ en fonction de $\varphi(x)$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_0(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie C : étude du cas particulier de la fonction I.

1. Étude de la fonction f_1.

   Dans cette partie, on note $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 dans un repère orthonormé du plan.

   a. Étudier la parité de la fonction f_1.

   b. Établir le tableau des variations de la fonction f_1 sur $[0\,;\,+\infty[$.

   c. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_1$ admet une asymptote horizontale et préciser la position de $\mathscr{C}_1$ par rapport à cette asymptote.

   d. Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse 0.

   e. Justifier que f_1 est de classe 2 sur $\mathbb{R}$. Étudier la convexité de f_1 et déterminer les éventuels points d'inflexion.

   f. Tracer T_0 et $\mathscr{C}_1$ dans un repère orthonormé du plan, en choisissant une unité graphique adaptée.

2. Étude d'une suite On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f_1\left(u_n\right)$.

   a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

   b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente.

   c. Déterminer sa limite L.

   d. Construire un algorithme en langage naturel permettant de déterminer le plus petit rang n_0 à partir duquel, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - L| \leqslant 10^{-1}$.

   e. Déterminer à l'aide de votre calculatrice ce rang n_0.

Partie D : étude du cas général

1. Étude de la fonction f_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   On rappelle que la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. 2

   a. Étudier la parité de f_n en fonction de n.

   b. Donner le sens de variation de f_n sur $\mathbb{R}^+$.

   c. Construire le tableau des variations de f_n sur $\mathbb{R}$ en fonction de la parité de n.

2. Calcul d'intégrales

   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f_n(t)$. En déduire qu'il existe un réel t_0 (qu'on ne cherchera pas à déterminer) tel que pour tout $t \geqslant t_0$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

b. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
En déduire que l'intégrale I_n est convergente.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+2} = (n+1)I_n$.

d. Justifier, en utilisant la **Partie B**, que $I_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

e. Calculer I_1.

f. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}*$, les relations suivantes :

$$I_{2n+1} = 2^n n! \quad \text{et} \quad I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Partie E : étude d'une variable à densité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité.

2. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f.

a. Déterminer la fonction de répartition F de X.

b. Montrer que X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ et déterminer sa valeur.

c. Montrer que X admet une variance $\mathrm{V}(X)$ et déterminer sa valeur.

3. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable à densité. On note G sa fonction de répartition et g une densité de Y.

a. Soit $x \geqslant 0$ et soit x' le réel vérifiant $P(Y \leqslant x) = P(X \leqslant x')$.
Exprimer x' en fonction de x. En déduire $G(x)$ en fonction de $F(x)$ si $x \geqslant 0$.

b. Déterminer $G(x)$ si $x < 0$.

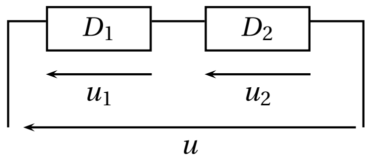
c. Déduire une densité g de la variable aléatoire Y. Reconnaître la loi de Y, donner $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{V}(Y)$.

FIN

ANNEXE 1

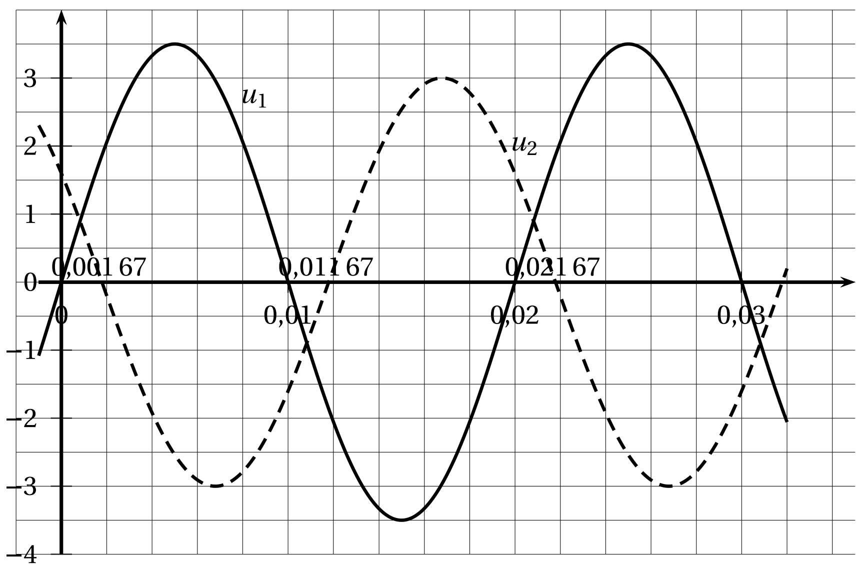
Énoncé initial destiné aux élèves

Exercice 1 :



Les dipôles D_1 et D_2 sont montés en série. Les tensions $_1$ aux bornes de D_1 et u_2 aux bornes de D_2, exprimées en volt, sont sinusoïdales.

L'Expérimentation Assistée par Ordinateur ($ExAO$) a permis de relever le graphique suivant :



1. Exploitation de l'oscillogramme
   L'expression des fonctions u_1 et u_2 s'écrit sous la forme $A\sin(\omega t + \varphi)$.
   a. Donner les valeurs de l'amplitude notée A, de la pulsation notée ω et de la phase à l'origine notée φ pour la tension u_1.
   b. Donner, en fonction du temps, l'expression de la tension u_1.
2. Méthode graphique
   a. Sachant que $u_2(t) = 3\sin\left(100\pi t + \dfrac{5\pi}{6}\right)$, construire la représentation de Fresnel des tensions u_1 et u_2.
   b. En déduire la représentation de Fresnel de la tension $u = u_1 + u_2$.
   c. Donner, en fonction du temps, l'expression de la tension u.

Exercice 2 :

On applique une tension sinusoïdale u telle que $u(t) = \sqrt{3}\sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ aux bornes d'un circuit comportant en série une résistance et une diode idéale. On étudie le phénomène sur une période.
La diode est non passante si $u \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ et elle est passante si $u > \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Problématique : Au bout de combien de temps, en seconde, la diode devient non passante?

1. La diode est-elle passante ou non passante à $t = 0$?
2. Montrer que l'équation $u(t) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ peut s'écrire $\sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.
3. Résoudre l'équation $\sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ sur l'intervalle $[0\,;\,0{,}02]$.
4. Répondre à la problématique.

ANNEXE 2 - page 1

Extrait du Bulletin officiel spécial numéro 2 du 19/02/2009

Programme de première professionnelle
v3.2 Trigonométrie 1 groupements A et B)

L'objectif de ce module est d'utiliser le cercle trigonométrique et de construire point par point la courbe représentative de la fonction sinus.

Capacités	**Connaissances**	**Commentaires**
Placer, sur le cercle trigonométrique point M image d'un nombre réel x donné,	Cercle trigonométrique. Image d'un nombre réel x donné sur le cercle trigonométrique	L'enroulement de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique, mené de façon expérimentale, permet d'obtenir l'image de quelques nombres entiers puis des nombres réels π, $-\pi$, $\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{3}$.
Déterminer graphiquement, à l'aide du cercle trigonométrique, le cosinus et le sinus d'un nombre réel pris parmi les valeurs particulières. Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée du cosinus et du sinus d'un nombre réel donné. Réciproquement, déterminer, pom· tout nombre réel k compris entre -1 et 1, le nombre réel x compris entre 0 et π tel que $\cos x = k$ $\left(\text{ou compris entre } -\dfrac{\pi}{2} \text{ et } \dfrac{\pi}{2}\right)$ tel que $\cos x = k$ ou $\sin x = k$.	Cosinus et sinus d'un nombre réel. Propriétés : x étant un nombre réel. $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	Définition : pour tout nombre réel x, $\cos x$ et $\sin x$ sont les coordonnées du point M, image du nombre réel x sur le cercle trigonométrique. Les valeurs particulières sont : $0, \pi, -\pi, \dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}$. Faire le lien, pour certaines valeurs particulières, entre le cosinus d'un nombre et le cosinus d'un angle défini au collège dans un triangle rectangle.
Passer de la mesure en degré d'un angle géométrique à sa mesure en radian, dans des cas simples, et réciproquement.	Les mesures en degré et en radian d'un angle sont proportionnelles (π radians valent 180 degrés).	Le point A étant l'extrémité du vecteur unitaire de l'axe des abscisses et le point M l'image du réel x, la mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{\text{AO}M}$ est : – égale à x si $0 \leqslant x \leqslant \pi$; – égale à $-x$ si $-\pi \leqslant x \leqslant 0$.

ANNEXE 2 - page 2

Extrait du Bulletin officiel spécial numéro 2 du 19/02/2009

Programme de terminale professionnelle

3.3 Trigonométrie 2 (groupement A)

L'objectif de ce module est de fournir aux élèves quelques outils spécifiques. Leur introduction s'appuie sur des exemples concrets issus du domaine professionnel. L'utilisation des TIC est nécessaire.

Capacités	Connaissances	Commentaires
Établir des liens entre le vecteur de Fresnel d'une tension ou d'une intensité sinusoïdale de la forme $a\sin(\omega t+\varphi)$ et la courbe représentative de la fonction qui à t associe $a\sin(\omega t+\varphi)$.	Représentation de Fresnel d'une grandeur sinusoïdale.	Les valeurs instantanées des tensions ou intensités électriques sinusoïdales servent de support à l'étude de ces notions.
Placer sur le cercle trigonométrique les points « images » des réels $-x$, $\pi-x$, $\frac{\pi}{2}-x$, et $\pi+x$ connaissant « l'image » du réel x. Utiliser le cercle trigonométrique pour écrire les cosinus et sinus des réels $-x$, $\pi-x$, $\frac{\pi}{2}-x$, $\frac{\pi}{2}+x$ et $\pi+x$ en fonction des cosinus et sinus du réel x.	Angles associés : supplémentaires, complémentaires, opposés et angles dont les mesures sont différentes de π. Courbe représentative de la fonction fonction cosinus.	La relation $\cos x = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ permet d'obtenir la courbe représentative de la fonction cosinus.

Capacités	**Connaissances**	**Commentaires**
Mettre en oeuvre les formules exprimant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$, $\sin b$, $\sin b$.	Formules exprimant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $cos a$, $\cos b$, $\sin a$.	Les formules sont admises.
Résoudre les équations de la forme $\cos x = a$, $\sin x = b$ et $\sin(\omega t + \varphi) = c$. Estimer, à l'aide d'un tableur-grapheur ou d'une calculatrice, la (les) solutions), dans un intervalle donné, de l'équation $f(x) = \lambda$ avec λ réel donné et $f(x) = \cos x$ ou $f(x) = \sin x$ et de l'équation $\sin(\omega t + \varphi) = c$.	Équations de la forme $\cos x = a$ et $\sin x = b$ et $\sin(\omega t + \varphi) = c$.	Utiliser le cercle trigonométrique en se limitant aux cas où les réels a, b et c ont pour valeur absolue 0, 1, $\dfrac{2}{2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Dans le cas où λ n'est pas une des valeurs citées ci-dessus, donner une valeur approchée de la (les) solution(s) cherchée(s).

ANNEXE 3 - Document réponse à rendre avec la copie

Copie d'élève de l'évaluation diagnostique

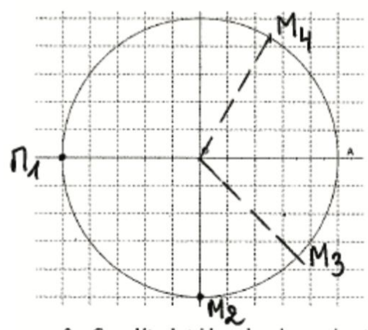
1. Un angle a pour mesure 36°. Sa mesure, en radian, est égale à :

a. $\frac{\pi}{36}$ b. $\frac{\pi}{18}$ c. $\frac{\pi}{5}$ d. $\frac{\pi}{10}$

Un angle a pour mesure $\frac{4\pi}{9}$ rad. Sa mesure, en degré, est égale à : $4 \times 180 \div 9 = 80$

a. 160 b. 80 c. 95 d. 42

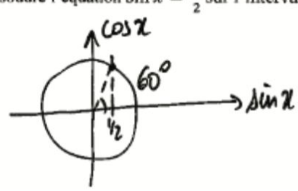
2. Placer sur le cercle trigonométrique les points M_1, M_2, M_3 et M_4 images respectives des réels $x_1 = \pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \frac{\pi}{4}$ et $x_4 = -\frac{\pi}{3}$.



3. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π
$\sin x$	-0,5	-1	0	0,5	0,7	0,8	0

4. Résoudre l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$ sur l'intervalle$\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.



l'angle vaut 60°
donc $x = 60°$