

∞ CAPLP Concours externe Option mathématiques ∞
2025 épreuve 1

ÉPREUVE ÉCRITE DISCIPLINAIRE

PARTIE 1 : MATHÉMATIQUES

La partie mathématiques est constituée de deux exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Le premier exercice est un vrai faux avec justification.

Le deuxième exercice est constitué de quatre parties.

Exercice 1

Pour chacune des propositions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère l'équation dans \mathbb{C} : $z^2 - 2iz - 1 + 8i = 0$.
Proposition : Cette équation admet deux solutions complexes dont les parties réelles sont opposées ou nulles.
2. On considère un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont trois entiers consécutifs.
Proposition : Le seul triangle rectangle vérifiant cette condition est celui dont les longueurs des côtés sont respectivement 3, 4 et 5.
3. **Proposition :** Si Julie gagne 20 % de moins que Pauline, alors Pauline gagne 20 % de plus que Julie.
4. On considère l'équation différentielle

$$(E) : y''(t) = y'(t) + 2yt$$

Proposition : L'unique solution de (E) sur \mathbb{R} telle que $y(0) = y'(0) = 0$ est la fonction nulle.

5. Soit X et Y deux matrices carrées non nulles de même taille à coefficients réels.
Proposition : Si $XY = 0$ alors les matrices X et Y ne sont pas inversibles.
6. Un groupe est constitué de 6 filles et 4 garçons. On forme une équipe de cinq personnes, composée de 3 filles et 2 garçons, extraits de ce groupe.
Proposition : On peut réaliser 120 équipes différentes.
7. On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x + 2} - x$ définie sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$.
Proposition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$.
8. Une voiture roule à la vitesse uniforme de 90 km.h^{-1} pendant 1 h 12 min, puis à 40 km.h^{-1} pendant une durée inconnue.
Sur l'ensemble du trajet, la vitesse moyenne de cette voiture est égale à 50 km.h^{-1} .
Proposition : La durée inconnue est 4 h 48 min.

9. On considère trois suites numériques (u_n) , (v_n) et (w_n) définies sur \mathbb{N} . On suppose qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Proposition : Si les suites (u_n) et (w_n) convergent alors la suite (v_n) converge.

10. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan (P) d'équation $-2x + 3y - 6z - 27 = 0$ et la sphère (S) de centre $A(4; -1; 3)$ et de rayon 8.

Proposition : Le plan (P) est tangent à la sphère (S) .

11. Soit A et B deux évènements indépendants.

Proposition : Les évènements \bar{A} et \bar{B} sont des évènements indépendants.

Exercice 2

On considère, pour l'ensemble du problème, les fonctions

$$f : x \mapsto e^{-x} \cos(x) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto e^{-x} \sin(x)$$

définies et dérivables sur \mathbb{R} .

On note $\{$ et $\}$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie I : Propriétés de la fonction f

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x + 2n) = e^{-2n} f(x)$.
2. Expliquer comment, à partir du graphe de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, on peut construire le graphe de la fonction f sur tout intervalle $[2n; 2(n+1)\pi]$ avec n entier naturel non nul.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq g(x)$.
4. Calculer la fonction dérivée de la fonction f .
5. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.
6. On appelle point de contact des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g tout point dont l'abscisse x vérifie

$$f(x) = g(x).$$

Déterminer l'ensemble H des points de contact des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

7. On se propose de montrer que les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont les mêmes tangentes en tous les points de l'ensemble H .
 - a. Déterminer une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f en tout point de H .
 - b. Déterminer une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_g en tout point de H et conclure.
8. On s'intéresse à la tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point d'abscisse 0.
 - a. Donner une équation de cette tangente.
 - b. Montrer que cette tangente est au-dessous de la courbe \mathcal{C}_g .

Partie II : Dérivation

9. Justifier que la fonction f est la partie réelle de la fonction $h : x \mapsto e^{x(-1+i)}$ définie sur \mathbb{R} .

10. Pour tout n entier naturel, déterminer la dérivée n -ième de la fonction h .
11. Soit n un entier naturel. Écrire $(-1 + i)^n$ sous forme exponentielle.
12. En déduire que, pour tout n entier naturel, la dérivée n -ième de la fonction f , notée $f^{(n)}$, est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$x \longmapsto \sqrt{2}^n \cos\left(x + \frac{3n\pi}{4}\right)$$

13. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $f^{(n)}(0) = 0$.

Partie III : Calcul intégral

14. Montrer que la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \frac{1}{2} e^{-x}(-\cos(x) + \sin(x))$ est une primitive de la fonction f .
15. Montrer que :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

On se propose d'étudier la suite (u_n) définie, pour tout n entier naturel, par :

$$u_n = \int_0^{2n\pi} |f(x)| dx$$

16. a. Étudier les variations de la suite (u_n) .
 b. Montrer, en utilisant la question 5. que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$.
 c. En déduire la convergence de la suite (u_n) .
17. Montrer que $u_1 = \frac{1}{2} \left(1 + 2e^{-\frac{\pi}{2}} + 2e^{-\frac{3\pi}{2}} - e^{-2\pi}\right)$.
18. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-2n\pi} u_1.$$

19. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2k\pi}.$$

20. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{u_1}{1 - e^{-2\pi}}.$$

Partie IV : Équation différentielle

21. Démontrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire, du second ordre et à coefficients constants, de la forme :

$$(E): \quad y'' + ay' + by = 0.$$

On donnera les valeurs des nombres a et b .

22. Déterminer les conditions initiales $y(0)$ et $y'(0)$ telles que f soit l'unique solution de l'équation différentielle (E).
23. On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par $v_n = f^{(n)}(0)$.
En utilisant les questions 21. et 22., montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} v_{n+2} &= -2v_{n+1} - 2v_n \\ v_0 &= 1 \\ v_1 &= -1 \end{cases}$$

24. En déduire la formule explicite de v_n en fonction de n .
25. Soit n un entier naturel. Donner le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction f .
26. On note (T_0) la tangente à \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 0.
- a. Justifier qu'une équation de (T_0) est :

$$y = -x + 1.$$

- b. Autour du point A, quelle est la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à (T_0) ? Justifier.
27. Soit un entier naturel non nul p . On pose : $h = 10^{-p}$.
- a. On souhaite déterminer numériquement le plus grand entier naturel m tel que :

$$\forall x \in [-mh; 0], \quad f(x) \leq -x + 1.$$

Compléter le programme suivant en précisant ce qu'il faut écrire à la place du mot TEXTE.

```

1  from math import *
2  p=int(input(" entrer un entier naturel p = "))
3  h=10**(- p)
4  m=0
5
6  while TEXTE :
7  m=m+1
8
9  print (-(m -1)* h)

```

- b. Expliquer pourquoi ce programme se termine toujours.
- c. Pour tout entier naturel n , $n \geq 2$, proposer un programme écrit en langage Python permettant de déterminer numériquement le plus grand entier naturel ℓ tel que :

$$\forall x \in [-\ell h; 0], \quad f(x) \geq P_n(x)$$

où P_n est la partie régulière du développement limité de f à l'ordre n en 0.