

### EXERCICE 1

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou si elle est fautive puis :

- si elle est vraie, la démontrer
- si elle est fautive, donner un contre-exemple.

1. Toute suite réelle, convergente est monotone à partir d'un certain rang.
2. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions. définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  on considère  $M(t)$  le point de coordonnées  $(f(t), g(t))$  et on note  $\Gamma$  la courbe décrite par le point  $M(t)$  lorsque  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ .

Ainsi  $\Gamma$  est la courbe paramétrée par  $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ ,  $t$  variant dans  $\mathbb{R}$ .

L'affirmation est la suivante : si les fonctions  $f$  et  $g$  sont paires, la courbe  $\Gamma$  est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.  $y'Oy$ .

3. La fonction  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x\sqrt{|x|}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
4. Pour une fonction  $f$  continue sur l'intervalle  $[0; 1]$ , si  $\int_0^1 f(t) dt = 0$ , alors  $f$  est la fonction nulle sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

### EXERCICE 2

1. Étude de la fonction  $f$  telle que  $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ 
  - a. Déterminer l'ensemble  $D$  de tous les nombres réels  $x$  pour lesquels  $f(x)$  est défini.
  - b. On pose désormais  $f(0) = 0$ . La fonction  $f$  est-elle alors continue à droite en 0?
  - c. La fonction  $f$  est-elle alors dérivable à droite en 0?
  - d. Étudier les variations de la fonction  $f$  et dresser son tableau de variations sur  $D \cup \{0\}$ .  
On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de  $f(e)$ , où  $e$  est le nombre réel positif tel que  $\ln(e) = 1$ .
2. Étude de la suite  $v$  telle que  $v_0 = 3$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f(v_n)$  où  $f$  est la fonction étudiée à la question 1
  - a. Montrer, par récurrence sur  $n$ , que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq e.$$

- b. Justifier que la suite  $v$  converge et déterminer sa limite
- c. Montrer que :

$$\forall x \geq e, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}.$$

- d. Énoncer l'inégalité des accroissements finis.  
e. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}.$$

- f. Déterminer un entier naturel  $n_1$  à partir duquel  $v_n$  est une valeur approchée du nombre réel  $e$  à au moins  $10^{-12}$ .

### 3. Solutions d'une équation différentielle

Soit  $K$  l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

On note  $E_1$  l'équation différentielle suivante :

$$-x^2 z'(x) + xz(x) = z^2(x).$$

On recherche les fonctions  $z$  solutions de  $E_1$  sur l'intervalle  $K$  et qui ne s'annulent pas sur  $K$ .

- a. On pose  $y = \frac{1}{z}$ . Vérifier que  $y$  est solution sur  $K$  d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on notera  $E_2$ .  
b. Résoudre l'équation différentielle  $E_2$  sur l'intervalle  $K$ .

On vérifiera ensuite que ces solutions sont de la forme  $g_a : x \mapsto \frac{\ln(ax)}{x}$  où  $a$  est un nombre réel strictement positif.

Vérifier que, pour tout nombre réel  $a$  supérieur ou égal à 1,  $g_a$  ne s'annule pas sur  $K$ .

On a donc ainsi, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $K$ ,  $z(x) = \frac{x}{\ln(ax)}$ .

- c. Pour tout nombre réel  $a$  strictement positif, on note  $\mathcal{C}_a$  la courbe représentative de la fonction  $f_a : x \mapsto \frac{\ln(ax)}{x}$  dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine  $O$ .

Montrer que la courbe  $\mathcal{C}_a$  est l'image de la courbe  $\mathcal{C}_1$  par une homothétie de centre  $O$  dont on précisera le rapport.

## EXERCICE 3

### 1. Calcul des puissances successives d'une matrice

On note  $\mathcal{B}_c = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  la base canonique de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ . On a donc :

$$\vec{e}_1 = (1; 0; 0), \quad \vec{e}_2 = (0; 1; 0), \quad \vec{e}_3 = (0; 0; 1).$$

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}_c$ , est  $A$ .

- a. On considère les vecteurs suivants de  $\mathbb{R}^3$  :  $\vec{u}_1 = (1 ; -2 ; 1)$ ,  $\vec{u}_2 = (1 ; 4 ; 1)$ ,  $\vec{u}_3 = (1 ; 0 ; -1)$ .  
Vérifier que la famille  $\mathcal{B}_n = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  est une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ .  $Q$  est ainsi la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}_c$  à la base  $\mathcal{B}_n$ .
- b. Calculer  $Q^2$  et  $Q^3$  et vérifier que  $Q^3$  est combinaison linéaire de  $I_3$  et de  $Q^2$ .
- c. En déduire que la matrice  $Q$  est inversible, puis déterminer son inverse  $Q^{-1}$ .
- d. Vérifier que les vecteurs  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  et  $\vec{u}_3$  sont des vecteurs propres de l'endomorphisme  $f$ .  
En déduire la matrice  $A'$  de l'endomorphisme  $f$  dans la base  $\mathcal{B}_n$ .
- e. Rappeler le lien entre les matrices  $A'$ ,  $A$  et  $Q$ .
- f. En déduire, pour tout nombre entier naturel  $n$  non nul, l'expression de la matrice  $A^n$  en fonction de  $A'$ ,  $Q$  et  $n$ .

Pour la suite de l'exercice, on admettra que, pour tout nombre entier naturel  $n$  non nul :

$$A^n = \frac{2^n}{6} = \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \\ 2^{n+2} - 4(-1)^n & 2^{n+2} + 2(-1)^n & 2^{n+2} - 4(-1)^n \\ 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$$

## 2. Étude de la loi d'une variable aléatoire

Dans un jeu, un pion se déplace aléatoirement sur les sommets d'un triangle, notés  $S_1, S_2, S_3$ , selon la règle suivante :

- À l'instant 0, le pion se situe au sommet  $S_1$ .
- Si à l'instant  $n$  le pion est au sommet  $S_1$ , alors à l'instant  $n + 1$  il sera au sommet  $S_2$ .
- Si à l'instant  $n$  le pion est au sommet  $S_2$ , alors à l'instant  $n + 1$  il sera au sommet  $S_1$  avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ , au sommet  $S_2$  avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ , au sommet  $S_3$  avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ .
- Si à l'instant  $n$  le pion est au sommet  $S_3$ , alors à l'instant  $n + 1$  il sera au sommet  $S_2$ .

On appelle  $X_n$  la variable aléatoire égale à  $i$  si le pion se trouve à l'instant  $n$  sur le sommet  $S_i$ , et on note  $a_n, b_n, c_n$  les probabilités :

$$a_n = P(\{X_n = 1\}), \quad b_n = P(\{X_n = 2\}), \quad c_n = P(\{X_n = 3\}).$$

- a. On note  $T_n$  la matrice à une colonne :  $T_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ .

Préciser les matrices  $T_0$  et  $T_1$ .

- b. Écrire la matrice  $M$ , carrée d'ordre 3, dont le terme situé à l'intersection de la  $i$ -ième ligne et de la  $j$ -ième colonne est égal à la probabilité conditionnelle  $P_{\{X_n=j\}}(\{X_{n+1} = i\})$ , notée aussi  $P(\{X_{n+1} = i\} / \{X_n = j\})$ .

- c. Justifier que les conditions d'application de la formule des probabilités totales sont réunies, puis l'utiliser pour montrer que, pour tout nombre entier naturel  $n$  :

$$T_{n+1} = MT_n.$$

- d. En déduire l'expression de la matrice  $T_n$  en fonction de  $n$ ,  $T_0$  et  $A$ , où  $A$  est la matrice étudiée à la question 1.
- e. En déduire les probabilités  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  en fonction de  $n$ , ainsi que leur limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- f. Vérifier que, pour tout nombre entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, l'espérance de  $X_n$  est indépendante de  $n$ .

#### EXERCICE 4

Dans tout cet exercice, on se place dans l'espace affine euclidien réel  $\mathcal{E}$  rapporté à un repère orthonormé direct  $\mathcal{R} = (\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soient les points  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; 1; 0)$  et  $C(0; 0; 1)$ . Pour tout point  $M$  de l'espace  $\mathcal{E}$  de coordonnées  $(x; y; z)$  dans le repère  $\mathcal{R}$ , on note indifféremment  $\varphi(M)$  ou  $\varphi(x; y; z)$  la quantité :

$$\varphi(M) = \varphi(x; y; z) = OM + AM + BM + CM$$

On admettra ici que la quantité  $\varphi(M)$  admet un minimum global, noté  $m$ , lorsque le point  $M$  décrit l'espace  $\mathcal{E}$  et on souhaite obtenir la valeur de ce minimum ainsi que le(s) point(s) en le(s)quel(s) ce minimum est réalisé.

1. Calculer et comparer les quantités  $\varphi(\text{O})$ ,  $\varphi(A)$ ,  $\varphi(B)$  et  $\varphi(C)$ .
2. Justifier que  $0 \leq m \leq 3$  et que si  $\varphi$  réalise son minimum  $m$  en un point  $P$  alors  $OP \leq 3$ .
3. Soit  $r$  l'application affine de l'espace  $\mathcal{E}$  transformant le point  $M(x; y; z)$  en le point  $M' = r(M)$  de coordonnées  $(y; z; x)$ .
  - a. Déterminer les images par l'application  $r$  des points  $\text{O}$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
  - b. Vérifier que l'application  $r$  est une isométrie, c'est-à-dire que, pour tout couple de points  $(M, N)$  de  $\mathcal{E}^2$ , les distances  $r(M)r(N)$  et  $MN$  sont égales, c'est-à-dire  $M'N' = MN$ .
  - c. Pour tout point  $M$  de l'espace  $\mathcal{E}$ , montrer que  $\varphi(M) = \varphi(M')$ .
4. Soit  $\Delta$  la droite passant par le point  $\text{O}$  et de vecteur directeur  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .  
Soit  $P$  un point qui n'est pas sur la droite  $\Delta$ .  
Soient  $P' = r(P)$  et  $P'' = r(P')$  et soit  $Q$  l'isobarycentre des points  $P$ ,  $P'$  et  $P''$ .
  - a. Montrer que pour tout point  $M$  de l'espace  $\mathcal{E}$ , on a :  
$$MQ \leq \frac{1}{3}(MP + MP' + MP'').$$
  - b. En déduire que  $\varphi(Q) - OQ \leq \varphi(P) - OP$ .
  - c. Vérifier que  $\vec{OQ} \cdot \vec{QP} = 0$ , puis en déduire que  $\varphi(Q) < \varphi(P)$ .
  - d. Si l'application  $\varphi$  réalise son minimum  $m$  en un point  $P$ , que sait-on désormais sur ce point  $P$ ?
5. On considère la fonction  $\Phi$  définie en tout nombre réel  $x$  par  $\Phi(x) = \varphi(x, x, x)$ .

- a. Montrer que, pour tout nombre réel  $x$  négatif ou nul,  $\Phi(x) \geq \Phi(0)$ .
- b. Étudier le sens de variation de la fonction  $\Phi$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- c. En déduire l'existence d'un point  $P_0$  en lequel l'application  $\varphi$  atteint son minimum.

Déterminer le point  $P_0$  et le minimum de l'application  $\varphi$ .

6. Vérifier que  $P_0$  est le barycentre du système de points pondérés  $\{(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$ .

On note  $\theta$  une mesure de l'angle non orienté  $\widehat{AP_0B}$ , choisie dans l'intervalle  $[0 ; \pi]$ .

Déterminer la valeur exacte de  $\cos(\theta)$  et une valeur approchée à un degré près par défaut de  $\theta$ .

Remarque : On pourrait vérifier (mais ceci est admis ici) qu'en fait les mesures des angles  $\widehat{OP_0A}$ ,  $\widehat{OP_0B}$ ,  $\widehat{OP_0C}$ ,  $\widehat{AP_0B}$ ,  $\widehat{BP_0C}$  et  $\widehat{CP_0A}$  choisies dans l'intervalle  $[0 ; \pi]$  sont toutes égales à  $\theta$ .