**Durée : 4 heures**

# CA/PLP externe 2006

**EXERCICE 1**

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Préciser si chacune des affirmations suivantes est vraie ou est fausse, et justifier la réponse.

1. Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, et $g$ une fonction définie sur $f(\mathrm{I})$. Les fonctions $f$ et $g$ ne sont pas nécessairement dérivables. Si $f$ est décroissante sur I et si $g$ est décroissante sur $f(\mathrm{I})$, alors $g \circ f$ est croissante sur I.
2. Si $x$ est un nombre réel irrationnel, alors pour tout nombre entier naturel non nul $n$ le réel $x^n$ est irrationnel.
3. Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + 9y = 0$. La seule solution de (E) qui vérifie la condition initiale $y(0) = 0$ est la fonction nulle.
4. Pour tout nombre entier naturel $n$ on a l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$.
5. Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $f$ est périodique et monotone sur $\mathbb{R}$, alors $f$ est constante.
6. Toute suite réelle strictement croissante tend vers $+\infty$.
7. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)$ une base de E. Pour tout vecteur non nul $v$ de E, la famille $(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ v)$ est encore une base de E.
8. Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormal, deux droites non parallèles aux axes du repère sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à $(-1)$.

**EXERCICE 2**

*Le but de cet exercice est l'étude de quelques propriétés géométriques des quadrangles harmoniques.*

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Dans tout l'exercice le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct

**Partie I**

Soient les points A, B, C, D d'affixes respectives $a = -2 + 2\mathrm{i}$ ; $b = -2\mathrm{i}$ ; $c = -2$ ; $d = 2 + 4\mathrm{i}$.
Soient les nombres complexes $Z_1$ et $Z_2$ tels que $Z_1 = \dfrac{b-a}{d-a}$ et $Z_2 = \dfrac{b-c}{d-c}$.

1. Faire une figure et placer les points A,B, C et D.
2. Écrire $Z_1$ et $Z_2$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
3. En déduire la nature des triangles BAD et BCD.
4. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

**Partie II**

Soient quatre points quelconques A, B, C, D distincts deux à deux, d'affixes respectives $a,\ b,\ c$ et $d$.

On appelle birapport des quatre points A, B, C, D rangés dans cet ordre, le quotient, noté [A, B, C, D] :

$$[\text{A, B, C, D}] = \frac{\dfrac{c-a}{c-b}}{\dfrac{d-a}{d-b}}.$$

**1.** Montrer que le birapport [A, B, C, D] est un nombre réel si et seulement si les quatre points A, B, C, D sont cocycliques ou alignés.

**2.** Montrer que la relation [A, B, C, D] $= -1$ est équivalente à chacune des relations suivantes :

$$\begin{array}{ll} (1) & 2(ab+cd) = (a+b)(c+d); \\ (2) & \left(c - \dfrac{a+b}{2}\right)\left(d - \dfrac{a+b}{2}\right) = \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2. \end{array}$$

Dans la suite du problème, on appelle quadrangle harmonique la figure formée par quatre points A, B, C, D distincts deux à deux, non alignés tels que le birapport [A, B, C, D] soit égal à $-1$.

**3.** Montrer que le quadrangle A, B, C, D de la partie 1 est harmonique.

**4.** Soit A, B, C et D un quadrangle harmonique. On note I le milieu du segment [AB]. En utilisant les résultats de la question 2. ci-dessus, montrer que la droite (AB) est la bissectrice de l'angle des demi-droites [IC) et [ID), et que l'on a :

$$\text{IC} \times \text{ID} = \frac{\text{AB}^2}{4}$$

**EXERCICE 3**

*Le but de cet exercice est l'étude d'une chaîne de transmissions aléatoires d'une information binaire.*

Un émetteur $E$ émet une information binaire (c'est-à-dire ne prenant que la valeur 0 ou la valeur 1).

Un récepteur $R$ reçoit cette information qui, pour des raisons non développées ici, peut être conforme ou non à l'information émise. Quelle que soit l'information émise par $E$ (« 0 » ou « 1 »), la probabilité que l'information reçue par $R$ soit conforme à l'information émise par $E$ est égale à $p (0 < p < 1)$ et la probabilité que l'information reçue par $R$ soit non-conforme à l'information émise est égale à $(1-p)$.

Ainsi par exemple lorsque l'information émise par $E$ est « 0 », la probabilité que l'information reçue par $R$ soit « 0 » est égale à $p$ et la probabilité que l'information reçue par R soit « 1 » est égale à $(1-p)$.

**Partie 1**

Dans cette partie, l'information binaire est transmise le long d'une chaîne de $(n+1)$ éléments électroniques, notés $E_0, E_1, \ldots, E_n$.

Chaque élément $E_k$ est successivement récepteur, puis émetteur, excepté le premier élément $E_0$ qui est seulement émetteur et le dernier élément $E_n$ qui est seulement récepteur. L'information émise par un émetteur-récepteur est toujours identique à celle reçue.

Pour tout nombre entier $k$ compris entre 0 et $(n-1)$, la transmission d'information de l'élément $E_k$ à l'élément suivant $E_{k+1}$ suit la loi définie en début d'exercice, c'est-à-dire que l'élément $E_{k+1}$ reçoit correctement l'information binaire émise par $E_k$ avec une probabilité égale à $p (0 < p < 1)$, et reçoit l'information contraire avec la probabilité $(1-p)$.

Par ailleurs, on a constaté que la qualité de la transmission d'un élément $E_k$ à l'élément suivant $E_{k+1}$ ne dépend pas de ce qui s'est passé lors des transmissions précédentes.

On note $A_k (1 \leqslant k \leqslant n)$, l'évènement « la valeur reçue par $E_k$ est identique à celle émise par $E_0$ », et on désigne par $P_k$ sa probabilité. On convient que $p_0 = 1$.

**1.** Étude du cas particulier $n = 2$.

**a.** Construire un arbre pondéré décrivant cette situation dans le cas $n = 2$. On précisera sur ce schéma les différentes probabilités.

**b.** Déterminer $p_1$ et $p_2$.

**2.** Étude du cas général.
Démontrer que pour tout nombre entier $k$ compris entre 0 et $(n-1)$ on a :

$$p_{k+1} = (2p-1)p_k + 1 - p.$$

**3.** On se propose de déterminer, l'expression de $p_n$ en fonction de $n$.

**a.** Pour tout nombre entier naturel $k$ inférieur ou égal à $n$, on pose : $u_k = p_k - \dfrac{1}{2}$.

i. Montrer que les $(u_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ sont les premiers termes d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

ii. En déduire l'expression de $p_n$ en fonction de $n$ et de $p$.

**b.** Démontrer que la suite $\left(p_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

**c.** Comment peut-on interpréter ce résultat ?

**Partie II**

Dans cette partie, l'émetteur $E_0$ émet une information binaire transmise directement, sans passer par des intermédiaires, vers une famille de récepteurs. Dans la suite de l'exercice on supposera que cette famille est infinie, et on la notera $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$.
Une partie de cette famille de récepteurs $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est « à l'écoute »autrement dit est prête à recevoir l'information émise par $E_0$, conforme ou non.
On suppose que les transmissions entre l'émetteur $E_0$ et chacun des récepteurs « à l'écoute »dans la famille $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont indépendantes les unes des autres et que la règle de transmission est la même que celle définie en début d'exercice, c'est-à-dire qu'un récepteur « à l'écoute »reçoit correctement l'information binaire émise par $E_0$ avec une probabilité égale à $p (0 < p < 1)$, et reçoit l'information contraire avec la probabilité $(1-p)$.

**1.** On considère que $n$ récepteurs sont « à l'écoute ». Déterminer la probabilité que $k$ d'entre eux exactement reçoivent correctement la valeur émise par $E_0$ ($k$ étant un nombre entier compris entre 0 et $n$).

**2.** Le nombre de récepteurs « à l'écoute »est une variable aléatoire $X$. On admet que cette variable suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$, $\lambda$ étant un nombre réel strictement positif donné. Pour tout entier naturel $k$ on a donc :

$$P(X = k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

On appelle $Y$ la variable aléatoire représentant le nombre de récepteurs de la famille $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ qui reçoivent la valeur émise par l'émetteur $E_0$.

**a.** Décrire par une phrase l'évènement $(Y = 0)$.

**b.** On appelle $B_n$ l'évènement : « $n$ récepteurs exactement sont « à l'écoute » ».
Démontrer que $P((Y=0) \cap B_n) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}(1-p)^n \lambda^n}{n!}$.

**c.** Justifier que l'on peut décrire l'évènement $(Y = 0)$ sous la forme suivante :

$$(Y = 0) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [(Y = 0) \cap B_n].$$

En déduire que $P((Y = 0)) = \mathrm{e}^{-\lambda p}$.
(On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

**d.** Pour tout nombre entier $k$ naturel, déterminer $P(Y=k)$. En déduire que $Y$ suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.
Donner alors son espérance $E(Y)$ et sa variance $V(Y)$.

**EXERCICE 4**

*Le but de cet exercice est l'étude de propriétés liées aux polynômes de Bernoulli*

Pour tout nombre entier naturel $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de $k$ éléments pris parmi $n$. On rappelle que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
On admet, dans tout cet exercice, qu'il existe une unique suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la condition initiale $b_0 = 1$ et la relation de récurrence $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k = 0$, valable pour tout $n$ entier supérieur ou égal à 2.
On appelle *nombres de Bernoulli* les nombres réels notés $b_k$ ainsi définis.
On appelle *polynômes de Bernoulli* les polynômes $B_n(X)$ définis par : $B_0(X) = 1$ et pour tout nombre entier naturel non nul $n$, $B_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}b_k X^{n-k}$.

1. Déterminer $b_1$, $b_2$, $b_3$ et $b_4$. Montrer en particulier que $b_4 = -\dfrac{1}{30}$.
2. Déterminer les polynômes $B_1(X)$, $B_2(X)$ et $B_3(X)$.
3. Vérifier que, pour tout nombre entier $n$ supérieur ou égal à 2, $B_n(0) = B_n(1) = b_n$.
4. Démontrer que, pour tout nombre entier $n$ supérieur ou égal à 1, $B_n'(X) = nB_{n-1}(X)$.
5. En déduire que, pour tout nombre entier $n$ supérieur ou égal à 1, $\displaystyle\int_0^1 B_n(t)\mathrm{t} = 0$.
6. Établir par récurrence que, pour tout nombre entier $n$ supérieur ou égal à 1,
$$B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}.$$
7. En déduire que pour tout nombre entier naturel $m$, et pour tout nombre entier $n \geqslant 2$, on a :
$$\sum_{k=0}^{m} k^n = \frac{1}{n+1}\left(B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}(0)\right).$$
Retrouver alors la formule donnant $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} k^2$.
8. On admet dans les questions suivantes que la suite $(B_n)$ est l'unique suite de polynômes vérifiant les propriétés démontrées aux questions 4 et 5 et telle que $B_0(X) = 1$.
Pour tout nombre entier naturel $n$, on pose : $A_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.
   **a.** Démontrer que la suite $(A_n)$ est confondue avec la suite $(B_n)$.
   **b.** En déduire que pour tout nombre entier $p$ supérieur ou égal à 1, $b_{2p+1} = 0$.
9. Soient $n$ et $p$ deux nombres entiers supérieurs ou égaux à 1. Soit $f$ une fonction de classe $\mathrm{C}^{2p+1}$ sur l'intervalle $[0\,;1]$. Pour tout nombre entier naturel non nul $n$, on désigne par $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre $n$ de $f$ et on pose par convention $f^{(0)} = f$.
   **a.** Montrer que, pour tout nombre entier $n$ de l'intervalle $[2\,;2p+1]$, on a : $\displaystyle\int_0^1 f^{(n)}(t)\times B_n(t)\mathrm{d}t = b_n\times\left(f^{n-1)}(1) - f^{n-1)}(0)\right) - n\times\int_0^1 f^{(n-1)}\times B_{n-1}(t)\mathrm{d}t.$

**b.** En déduire que, pour tout nombre entier naturel $k$ de l'intervalle $[1\ ;\ p]$, on a :

$$\frac{1}{(2k+1)!}\int_0^1 f^{(2k+1)}(t)B_{2k+1}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right) + \frac{1}{(2k-1)!}\int_0^1 f^{(2k-1)}(t)B_{2k-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

**c.** Montrer alors la première formule d'Euler-Mac Laurin :
pour tout nombre entier naturel $p$ non nul,

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{p} b_{2k}\frac{f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)}{(2k)!} - \frac{1}{(2p+1)!}\int_0^1 f^{(2p+1)}(t)B_{2p+1}(t)\,\mathrm{d}t.$$