CAPLP externe mathématiques-sciences 2007

EXERCICE 1

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou si elle est fausse puis :

- si elle est vraie, la démontrer
- si elle est fausse, donner un contre-exemple.

1. Toute suite réelle, convergente est monotone à partir d'un certain rang.

2. Soient f et g deux fonctions. défInies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Dans le plan muni d'un repère orthoxormé direct $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ on considère $M(t)$ le point de coordonnées $(f(t),\ g(t))$ et on note Γ la courbe décrite par le point $M(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

Ainsi Γ est la courbe paramétrée par $\left\{\begin{array}{lll} x & = & f(t)\\ y & = & g(t)\end{array}\right.$, t variant dans $\mathbb{R}$.

L'affirmation est la suivante : si les fonctions f et g sont paires, la courbe Γ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. $y'Oy$.

3. La fonction $h\ :\longmapsto x\sqrt{|x|}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

4. Pour une fonction f continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, si $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

EXERCICE 2

1. Étude de la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

a. Déterminer l'ensemble D de tous les nombres réels x pour lesquels $f(x)$ est défini.

b. On pose désormais $f(0) = 0$. La fonction f est-elle alors continue à droite en 0 ?

c. La fonction f est-elle alors dérivable à droite en 0 ?

d. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur $\mathrm{D} \cup \{0\}$.

On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(\mathrm{e})$, où e est le nombre réel positif tel que $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

2. Étude de la suite v telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f(v_n)$ où f est la fonction étudiée à la question 1

a. Montrer, par récurrence sur n, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant \mathrm{e}.$$

b. Justifier que la suite v converge et déterminer sa limite

c. Montrer que :

$$\forall x \geqslant \mathrm{e},\ 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{4}.$$

d. Énoncer l'inégalité des accroissements finis.

e. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^n}.$$

f. Déterminer un entier naturel n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée du nombre réel e à au moins 10^{-12}.

3. Solutions d'une équation différentielle

Soit K l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

On note E_1 l'équation diflërentieile suivante :

$$-x^2z'(x)+xz(x)=z^2(x).$$

On recherche les fonctions z solutions de E_1 sur l'intervalle K et qui ne s'annulent pas sur K.

a. On pose $y=\dfrac{1}{z}$. Vérifier que y est solution sur K d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on notera E_2.

b. Résoudre l'équation différentielle E_2 sur l'intervalle K.

On vérifiera ensuite que ces solutions sont de la forme $g_a\ :\ x \longmapsto \dfrac{\ln(ax)}{x}$ où a est un nombre réel strictement positif.

Vérifier que, pour tout nombre réel a supérieur ou égal à 1, g_a ne s'annule pas sur K.

On a donc ainsi, pour tout x appartenant à l'intervalle K, $z(x)=\dfrac{x}{\ln(ax)}$.

c. Pour tout nombre réel a strictement positif, on note $\mathscr{C}_a$ la courbe representative de la fonction $f_a\ :\ x \longmapsto \dfrac{\ln(ax)}{x}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O.

Montrer que la courbe $\mathscr{C}_a$ est l'image de la courbe $\mathscr{C}_1$ par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport.

EXERCICE 3

1. Calcul des puissances successives d'une matrice

On note $\mathscr{B}_c=\left(\overrightarrow{e_1}\,,\,\overrightarrow{e_2}\,,\,\overrightarrow{e_3}\right)$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On a donc :

$$\overrightarrow{e_1}=(1\,;\,0\,;\,0),\quad \overrightarrow{e_2}=(0\,;\,1\,;\,0),\quad \overrightarrow{e_3}=(0\,;\,0\,;\,1).$$

On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\4&2&4\\0&1&0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&4&0\\1&1&-1\end{pmatrix},\ \text{et } I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_c$, est A.

a. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u_1}=(1\,;\,-2\,;\,1)$, $\overrightarrow{u_2}=(1\,;\,4\,;\,1)$, $\overrightarrow{u_3}=(1\,;\,0\,;\,-1)$.

Vérifier que la famille $\mathscr{B}_n=\left(\overrightarrow{u_1}\,,\,\overrightarrow{u_2}\,,\,\overrightarrow{u_3}\right)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Q est ainsi la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_c$ à la base $\mathscr{B}_n$.

b. Calculer Q^2 et Q^3 et vérifier que Q^3 est combinaison linéaire de I_3 et de Q^2.

c. En déduire que la matrice Q est inversible, puis déterminer son inverse Q^{-1}.

d. Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et$\overrightarrow{u_3}$ sont des vecteurs propres de l'endomorphisme f.

En déduire la matrice A' de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}_n$.

e. Rappeler le lien entre les matrices A', A et Q.

f. En déduire, pour tout nombre entier naturel n non nul, l'expression de la matrice A^n en fonction de A', Q et n.

Pour la suite de l'exercice, on admettra que, pour tout nombre entier naturel n non nul :

$$A^n = \frac{2^n}{6} = \begin{pmatrix} 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n \\ 2^{n+2}-4(-1)^n & 2^{n+2}+2(-1)^n & 2^{n+2}-4(-1)^n \\ 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n \end{pmatrix}$$

2. Étude de la loi d'une variable aléatoire

Dans un jeu, un pion se déplace aléatoirement sur les sommets d'un triangle, notés S_1, S_2, S_3, selon la règle suivante :

- À l'instant 0, le pion se situe au sommet S_1.
- Si à l'instant n le pion est au sommet S_1, alors à l'instant $n+1$ il sera au sommet S_2.
- Si à l'instant n le pion est au sommet S_2, alors à l'instant $n+1$ il sera au sommet S_1 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, au sommet S_2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, au sommet S_3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- Si à l'instant n le pion est au sommet S_3, alors à l'instant $n+1$ il sera au sommet S_2.

On appelle X_n la variable aléatoire égale à i si le pion se trouve à l'instant n sur le sommet S_i, et on note a_n b_n, c_n les probabilités :

$$a_n = P(\{X_n = 1\}),\ b_n = P(\{X_n = 2\}),\ c_n = P(\{X_n = 3\}).$$

a. On note T_n la matrice à une colonne : $T_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Préciser les matrices T_0 et T_1.

b. Écrire la matrice M, carrée d'ordre 3, dont le terme situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne est égal à la probabilité conditionnelle $P_{\{X_n=j\}}(\{X_{n+1} = i\})$, notée aussi $P\left(\{X_{n+1} = i\}/\{X_n = j\}\right)$.

c. Justifier que les conditions d'application de la formule des probabilités totales sont réunies, puis l'utiliser pour montrer que, pour tout nombre entier naturel n :

$$T_{n+1} = MT_n.$$

d. En déduire l'expression de la matrice T_n en fonction de n, T_0 et A, où A est la matrice étudiée à la question 1.

e. En déduire les probabilités a_n ,b_n, c_n en fonction de n, ainsi que leur limite quand n tend vers $+\infty$.

f. Vérifier que, pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'espérance de X_n est indépendante de n.

EXERCICE 4

Dans tout cet exercice, on se place dans l'espace affine euclidien réel $\mathscr{E}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Soient les points A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 1 ; 0) et C(0 ; 0 ; 1). Pour tout point M de l'espace $\mathscr{E}$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ dans le repère $\mathscr{R}$, on note indifféremment $\varphi(M)$ ou $\varphi(x\ ;\ y\ ;\ z)$ la quantité :

$$\varphi(M) = \varphi(x\,;\,y\,;\,z) = \mathrm{O}M + \mathrm{A}M + \mathrm{B}M + \mathrm{C}M$$

On admettra ici que la quantité $\varphi(M)$ admet un minimum global, noté m, lorsque le point M décrit l'espace $\mathcal{E}$ et on souhaite obtenir la valeur de ce minimum ainsi que le(s) point(s) en le(s)quel(s) ce minimum est réalisé.

1. Calculer et comparer lesquantités $\varphi(\mathrm{O})$, $\varphi(\mathrm{A})$, $\varphi(\mathrm{B})$ et $\varphi(\mathrm{C})$.

2. Justifier que $0 \leqslant m \leqslant 3$ et que si φ réalise son minimum m en un point P alors $\mathrm{OP} \leqslant 3$.

3. Soit r l'application affine de l'espace $\mathcal{E}$ transformant le point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ en le point $M' = r(M)$ de coordonnées $(y\,;\,z\,;\,x)$.

a. Déterminer les images par l'application r des points O, A, B et C.

b. Vérifier que l'application r est une isométrie, c'est-à-dire que, pour tout couple de points $(M,\ N)$ de $\mathcal{E}^2$, les distances $r(M)r(N)$ et MN sont égales, c'est-à-dire $M'N' = MN$.

c. Pour tout point M de l'espace $\mathcal{E}$, montrer que $\varphi(M) = \varphi(M')$.

4. Soit Δ la droite passant par le point O et de vecteur directeur $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}$.

Soit P un point qui n'est pas sur la droite Δ.

Soient $P' = r(P)$ et $P'' = r(P')$ et soit Q l'isobarycentre des points P, P' et P''.

a. Montrer que pour tout point M de l'espace $\mathcal{E}$, on a :

$MQ \leqslant \dfrac{1}{3}\left(MP + MP' + MP''\right)$.

b. En déduire que $\varphi(Q) - \mathrm{O}Q \leqslant \varphi(P) - \mathrm{O}P$.

c. Vérifier que $\overrightarrow{\mathrm{O}Q} \cdot \overrightarrow{QP} = 0$, puis en déduire que $\varphi(Q) < \varphi(P)$.

d. Si l'application φ réalise son minimum m en un point P, que sait-on désormais sur ce point P ?

5. On considère la fonction Φ définie en tout nombre réel x par $\Phi(x) = \varphi(x,\ x,\ x)$.

a. Montrer que, pour tout nombre réel x négatif ou nul, $\Phi(x) \geqslant \Phi(0)$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction Φ sur $\mathbb{R}_+*$.

c. En déduire l'existence d'un point P_0 en lequel l'application φ atteint son minimum.

Déterminer le point P_0 et le minimum de l'application φ.

6. Vérifier que P_0 est le barycentre du système de points pondérés $\{(\mathrm{O},\ 3),\ (\mathrm{A},\ 1),\ (\mathrm{B},\ 1),\ (\mathrm{C},\ 1)\}$.

On note θ une mesure de l'angle non orienté $\widehat{\mathrm{A}P_0\mathrm{B}}$, choisie dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

Déterminer la valeur exacte de $\cos(\theta)$ et une valeur approchée à un degré près par défaut de θ.

Remarque : On pourrait vérifier (mais ceci est admis ici) qu'en fait les mesures des angles $\widehat{\mathrm{O}P_0\mathrm{A}}$, $\widehat{\mathrm{O}P_0\mathrm{B}}$, $\widehat{\mathrm{O}P_0\mathrm{C}}$, $\widehat{\mathrm{A}P_0\mathrm{B}}$, $\widehat{\mathrm{B}P_0\mathrm{C}}$ et $\widehat{\mathrm{C}P_0\mathrm{A}}$ choisies dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ sont toutes égales à θ.