CAPLP externe et troisième concours 2008
Mathématiques - Sciences

DURÉE : 4 heures

Ce sujet comprend quatre exercices.
Le premier exercice est un test vrai-faux avec justification.
Le deuxième exercice traite de probabilités.
Le troisième exercice étudie la nature géométrique d'une application du plan complexe dans lui-même.
Le quatrième exercice porte sur des suites adjacentes.

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction, interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices de poche est autorisé (conformément aux directives de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999).

EXERCICE 1

Pour chacune des propositions suivantes, préciser si elle est vraie ou si elle est fausse puis justifier votre réponse.
Remarque : la réponse « proposition vraie » ou « proposition fausse » non argumentée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 :
Soit f une fonction définie et croissante sur l'intervalle $[-3 ; 2]$ telle que $f(-3) = -1$ et $f(2) = 4$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3 ; 2]$.

Proposition 2 :
Soit f la fonction définie en tout réel x différent de -1 par $f(x) = \dfrac{5x+3}{4x+4}$.
Alors, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on a $f(x) \geqslant 1$.

Proposition 3 :
On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$. Si la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$, alors sa fonction dérivée f' est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

Proposition 4 :
Un cycliste part d'une ville A et roule jusqu'à une autre ville B à la vitesse moyenne de 20 kilomètres par heure. Il repart de la ville B et revient par le chemin inverse jusque la ville A à la vitesse moyenne de 30 kilomètres par heure. Sa vitesse moyenne sur le trajet aller-retour est donc de 25 kilomètres par heure.

Proposition 5 :
Soit f une isométrie du plan. Soient A et B deux points du plan et A$'$ l'image du point A par l'application f. On suppose que A$' \neq$ A. Si B est un point fixe de f, c'est-à-dire si $f(\text{B}) = \text{B}$, alors B appartient à la médiatrice du segment [AA$'$].

EXERCICE 2

Les questions 3. a. et 3. b. ne dépendent pas des questions 2. a. et 2. b.
Dans la fabrication d'appareils électroniques, une entreprise utilise trois types de composants (nommés X, Y et Z) dans les proportions suivantes : 15 % de composants de type X, 55 % de type Y et 30 % de type Z.
On sait que 5 % des composants du type X sont défectueux, 3 % des composants du type Y et 2 % des composants du type Z.
On dispose d'un stock constitué de tels composants dans les proportions indiquées ci-dessus.

1. On prélève un composant de ce stock. Chaque composant a la même probabilité d'être prélevé.
   On note X l'évènement : « le composant est de type X » et on définit de la même manière les évènements Y et Z. On note D l'évènement : « le composant est défectueux » et B l'évènement : « le composant n'est pas défectueux ».
   - **a.** Quelle est la probabilité que le composant prélevé soit un composant défectueux de type X ?
   - **b.** Quelle est la probabilité que le composant prélevé soit défectueux ? On notera p cette probabilité. On vérifiera que $p = 0,03$.
   - **c.** Les deux évènements « le composant est de type X » et « le composant est défectueux » sont-ils indépendants ?
   - **d.** Sachant que le composant prélevé est défectueux, quelle est la probabilité qu'il soit de type Z ?

2. À l'issue du processus de fabrication, un test permet de repérer les composants défectueux.
Ces derniers sont alors remplacés. Le remplacement d'un composant occasionne un surcoût de 2 € s'il est de type X, de 3 € s'il est de type Y, de 5 € s'il est de type Z.
   a. Déterminer le surcoût moyen de remplacement d'un composant défectueux.
   b. Si on répercute ce coût sur l'ensemble des composants (défectueux ou non), à combien s'élève en moyenne le surcoût occasionné par la présence de composants défectueux dans le stock ?
   On arrondira le résultat au centime d'euro inférieur.
3. On prélève cette fois quatre composants dans le stock. Ce stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de quatre composants.
   a. Déterminer la probabilité que les quatre composants prélevés soient d'un même type.
   b. On note N le nombre de composants qui ne sont pas défectueux parmi les quatre composants prélevés. Déterminer, à 0,001 près, la probabilité qu'au moins trois des quatre composants prélevés ne soient pas défectueux.

EXERCICE 3

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère l'application f du plan $\mathscr{P}$ dans le plan $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{5}{2}z + \left(\frac{3}{2} + 2\text{i}\right)\overline{z} + 2\text{i}.$$

Pour les figures, on prendra 2 cm pour unité de longueur.

On désigne par A, B, C les points d'affixes $z_{\text{A}} = 1$, $z_{\text{B}} = -1 + 2\text{i}$ et $z_{\text{C}} = 1 - \frac{5}{2}\text{i}$.

1. Soient A′, B′, C′ les images respectives des points A, B, C par l'application f.
   a. Donner les affixes des points A′, B′, C′.
   b. Placer les points A, B, C, A′, B′, C′ sur une figure.
   c. Montrer que les points A′, B′, C′ sont alignés. On note D′ la droite (A′B′).
2. Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe $z_\Omega = -\frac{1}{2}\text{i}$ et de rapport 5.
   a. Soit M un point d'affixe z. Exprimer, en fonction de z, l'affixe z_1 de l'image du point M par l'application h.
   b. On note h^{-1} l'application réciproque de l'application h. Caractériser l'application h^{-1} et exprimer, en fonction de z, l'affixe z_2 de l'image du point M d'affixe z par l'application h^{-1}.
   c. Déterminer les affixes des points A_2, B_2 et C_2 images respectives des points A′, B′ et C′ par l'application h^{-1} et placer ces points sur la figure de la question 1. b.
   d. On note D_2 l'image de la droite D′ par l'application h^{-1}. Vérifier que D_2 est la droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $2 + \text{i}$.
3. On note p l'application $p = h^{-1} \circ f$. Pour tout point M d'affixe z du plan $\mathscr{P}$, on note

$$_3 = h^{-1}(M') = h^{-1}(f(M)) = p(M).$$

et on note z_3 l'affixe du point M_3.
   a. Vérifier que $z_3 = \frac{1}{2}z + \left(\frac{3}{10} + \frac{2}{5}\text{i}\right)\overline{z}$.

b. Vérifier que les points invariants par l'application p sont les points de la droite D_2.

c. Montrer que le nombre $\dfrac{z_3}{2+\mathrm{i}}$ est un nombre réel et que le nombre $\dfrac{z-z_3}{2+\mathrm{i}}$ est un nombre imaginaire pur.

d. Définir alors géométriquement l'application p puis l'application f.

EXERCICE 4

Les parties B et C sont indépendantes de la partie A, la partie C n'utilise des parties précédentes que le théorème démontré dans la partie B.

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

On rappelle que deux suites réelles sont dites adjacentes lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- l'une des deux suites est croissante,
- l'autre suite est décroissante,
- la différence entre les deux suites tend vers zéro en l'infini.

Partie A : étude de deux suites couplées

On considère dans cette partie A les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

- $u_0 = 2,\ v_0 = 5$,
- pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{v_n + 2u_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

1. On pose, pour tout entier naturel n, $d_n = v_n - u_n$.
Vérifier que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique puis donner l'expression de d_n en fonction de n ainsi que sa limite lorsque n tend vers l'infini.

2. Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles adjacentes ?

4. On pose, pour tout entier naturel n, $s_n = u_n + v_n$.

a. Déterminer la nature de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

c. Vérifier que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite que l'on précisera.

Partie B : démonstration d'un résultat concernant les suites adjacentes

On se propose dans cette partie de démontrer le théorème suivant :

si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes, alors elles convergent et ont la même limite.

1. On rappelle (et on admet donc) que toute suite réelle croissante et majorée converge.
En déduire que toute suite réelle décroissante minorée converge.

2. On considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant supposée croissante.
On pose, pour tout entier naturel n, $d_n = b_n - a_n$.

a. Étudier la monotonie de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant b_n$.

c. Justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

d. Justifier que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

e. Conclure.

Partie C : suites adjacentes et dichotomie

Le but de cette partie est de montrer que l'on peut obtenir par dichotomie la borne supérieure d'une partie non vide et majorée de l'ensemble des réels.

On suppose que **K** est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

Soit M un majorant de **K** et k un élément de **K**.
On définit alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$(1)\ \left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & k \\ v_0 & = & M, \end{array}\right.$$

et pour tout n dans $\mathbb{N}$ $(2)\left\{\begin{array}{lll} u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = v_n & \text{si} & \dfrac{u_n+v_n}{2} \text{ ne majore pas } \mathbf{K} \\ u_{n+1} = u_n \text{ et } v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} & \text{si} & \dfrac{u_n+v_n}{2} \text{ majore } \mathbf{K} \end{array}\right.$

1. On suppose, dans cette question seulement, que :

$$\mathbf{K} =]-1\ ;\ 1] \cup [0\ ;\ 11[,\ k = 1 \text{ et } M = 13.$$

Déterminer $(u_n,\ v_n)$ pour tout entier n appartenant à $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

2. On revient désormais au cas général : **K** est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, M est un majorant de **K**, k est un élément de **K** et les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par les systèmes (1) et (2) ci-dessus.

a. Montrer que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant v_n$.

b. Étudier la monotonie des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Montrer qu'elles convergent vers un même réel que l'on notera s.

c. Justifier que, pour tout entier naturel n, v_n est un majorant de **K**, puis montrer que s majore **K**.

d. Justifier qu'il existe une suite d'éléments de **K** convergeant vers s.

e. Soit s' un majorant de **K**. Montrer que $s' \geqslant s$.

f. En déduire que, si k appartient à **K** et si M majore **K**, alors la limite des suites convergentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne dépend pas en fait des choix initiaux de k et de M.