CAPLP externe 2009

Exercice 1
Préciser pour chacune des propositions indépendantes qui suivent si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse.

Proposition 1 :
Pour tous nombres réels x et y, on a $x^2 - xy + y^2 \geqslant 0$.

Proposition 2
On considère la suite (u_n), définie par les conditions suivantes

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout nombre entier naturel } n,\ u_{n+1} = 2u_n + 2^n.$$

Alors, pour tout nombre entier naturel n, on a :

$$u_n = (n+2)2^{n-1}.$$

Proposition 3 :
On considère les fonctions f et g définies en tout nombre réel x par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x^2$.
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et de g. On appelle h l'homothétie de centre O et de rapport 2.
Alors la courbe $\mathscr{C}_f$ est l'image par l'application h de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Proposition 4 : Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ on considère, pour tout nombre réel m, la droite D_m d'équation

$$D_m : (3m+5)x - (2m+6)y = m+1.$$

Alors toutes les droites D_m sont concourantes en un même point.

Proposition 5
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels non nuls.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.
Tournez la page S. V. P.

Exercice 2
On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x strictement positif par

$$f(x) = \frac{x^2-1}{2} - \ln(x).$$

Partie A : étude de la fonction f

1. Étudier les variations de la fonction f. On précisera en particulier la fonction dérivée, son signe et les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Les résultats seront consignés dans un tableau de variations.
2. La courbe représentative de la fonction f admet-elle une droite asymptote ? Si oui, en préciser une équation cartésienne.
3. Donner une représentation graphique de la fonction f dans un repère correctement choisi.
4. Soit a un nombre réel dans l'intervalle $]0\ ;\ 1[$. Calculer $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et en donner une interprétation graphique.

5. Déterminer la limite de $\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque a tend vers 0 par valeurs supérieures.

Partie B : limite d'une somme et d'une suite

Pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$$

1. Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2.
Montrer que pour tout nombre entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant n-1$ on a :

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{j+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}f\left(\frac{j}{n}\right).$$

2. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. En déduire que la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente et déterminer sa limite.

4. Montrer que. pour tout nombre entier naturel non nul n,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

5. En déduire que : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{12n} + \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) - \frac{n}{2}$.

6. En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$.

Exercice 3

Dans une usine, on effectue deux opérations indépendantes sur des pièces avant d'obtenir un produit fini que l'on doit calibrer.

1. La première opération est un tournage. Elle est effectuée à l'aide soit d'une machine M_1, soit d'une machine M_2, ces deux machines effectuant le même travail.

Chaque jour 1500 pièces différentes sont tournées par la machine M_1 ; 0,2 % d'entre elles sont défectueuses.

Chaque jour 3500 pièces différentes sont tournées par la machine M_2 ; 0,3 % d'entre elles sont défectueuses.

a. À l'issue de cette première opération, on choisit une pièce au hasard dans le lot des 5000 pièces tournées sur une journée par les deux machines M_1 et M_2.

Quelle est la probabilité que cette pièce soit défectueuse ? On peut s'aider d'un arbre ou d'un tableau.

b. On suppose dans cette question que la pièce choisie est défectueuse. Quelle est dans ce cas la probabilité qu'elle ait été tournée par la machine M_1 ?

2. La seconde opération est un fraisage. L'expérience montre que 2 % de ces fraisages sont mal effectués. On prélève au hasard n pièces d'un lot de pièces fraisées. On appelle Y la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces mal fraisées trouvées lors d'un prélèvement de n pièces du lot. Puisque ce lot contient une grande quantité de pièces fraisées, on assimile ce prélèvement de n pièces à un tirage avec remise de n pièces.
   a. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ? Donner son espérance et son écart type en fonction de n.
   b. Dans cette question $n = 5$. Quelle est la probabilité que, parmi les cinq pièces prélevées, exactement deux pièces soient mal fraisées ?
   c. Dans cette question $n = 100$. On peut alors approcher Y par une variable aléatoire Y_{P} qui suit une loi de Poisson de paramètre 2. Quelle est alors la probabilité que, parmi les 100 pièces prélevées, il n'y en ait pas plus de 2 qui soient mal fraisées ?
3. À l'issue des deux opérations de tournage et de fraisage le volume V de la pièce obtenue doit être de 502 cm^3. Le volume V suit une loi normale de moyenne $m = 502$ et d'écart-type $\sigma = 5$.
   La pièce est mise au rebut si le volume n'est pas compris entre 496 cm^3 et 508 cm^3.
   Sachant que la variable $X = \dfrac{V - m}{\sigma}$ suit la normale centrée réduite (dont un tableau de valeurs est donné en annexe), calculer la probabilité qu'une pièce obtenue soit mise au rebut à cause de son volume.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 4
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
On considère les applications f, g, s et t définies, lorsque cela a un sens, par :

$$f(z) = \frac{1 - 4\text{i} - 3z}{z + \text{i}}, \quad g(z) = \frac{1}{z}, \quad s(z) = (1 - \text{i})z - 3 \text{ et } \quad t(z) = z + \text{i}.$$

Soit F la transformation du plan complexe associée à f c'est-à-dire l'application qui transforme le point M d'affixe $z \neq -\text{i}$ en le point $F(M)$ d'affixe $f(z)$.
On définit de même G, S et T les transformations du plan complexe associées respectivement aux applications g, s et t. Ainsi, si M est le point d'affixe z, $G(M)$, $S(M)$ et $T(M)$ sont, lorsque cela est possible, les points d'affixes respectives $g(z)$, $s(z)$ et $t(z)$.

1. Préciser la nature géométrique de la transformation T et caractériser cette transformation.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude S.
3. L'une des trois égalités suivantes est correcte : $f = t \circ g \circ s$, $j = s \circ g \circ t$ et $f = g \circ s \circ t$.
   Préciser laquelle en justifiant la réponse.
4. Vérifier que f est une bijection de $\mathbb{C}\ \{-\text{i}\}$ dans $\mathbb{C}\ \{-3\}$ et expliciter son application réciproque f^{-1}.
5. Soit D l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $(1 - 2\text{i})z + (1 + 2\text{i})\overline{z} + 6 = 0$.
   Donner une équation cartésienne de D puis en déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble D.

6. Représenter dans le plan complexe l'ensemble D et son image D_1 par la transformation T.

   On pourra prendre 2 cm pour unité graphique.

7. On admet que G, la transformation du plan complexe associée à l'application g transforme toute droite ne passant pas par l'origine en un cercle passant par l'origine mais privé de l'origine.

   Déterminer l'image C_1 de l'ensemble D_1 par l'application G. On pourra par exemple utiliser les points d'intersection de l'ensemble D_1 avec les axes de coordonnées.

   Représenter l'ensemble C_1 sur la figure de la question précédente.

8. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'image C_2 de l'ensemble C_1 par la similitude S. Représenter l'ensemble C_2 sur la figure.

9. Les ensembles C_2 et D sont-ils tangents ? Justifier la réponse.

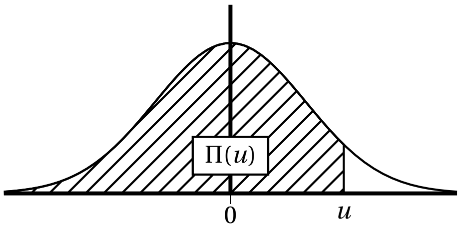
ANNEXE

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Extraits de la table de la fonction intégrale de la loi normale centrée réduite $N(0\ ;\ 1)$

$$\Pi(u) = P(X \leqslant u) = \int_{-\infty}^{u} f(x)\,\mathrm{d}x$$



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,665 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,7224
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,7486	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,795 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 5	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,881 0	0,8830
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,9177
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,9292	0,9306	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4
$\Pi(u)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66

u	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(u)$	0,999 76	0,999841	0,999 928	0,999 968	0,999 997