∾ CAPLP externe 2010 ∾

DURÉE : 4 heures

Le sujet est constitué de quatre exercices indépendants

Le premier exercice est un test vrai-faux avec justification.
Le deuxième exercice traite de calculs de probabilité.
Le troisième exercice étudie la position particulière du point d'intersection de deux droites dans trois situations différentes.
Le quatrième exercice porte sur l'obtention d'une valeur approchée du nombre réel $\sqrt[3]{2}$ *à l'aide de deux suites.*

Exercice 1
On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Préciser, pour chacune des propositions indépendantes qui suivent, si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse.

Proposition 1 :
Toute fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I.

Proposition 2 :
Toute fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I.

Proposition 3 :
Soit x_0 un nombre réel, soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, f étant continue en x_0 et g ne l'étant pas. La fonction $f+g$ n'est pas continue en x_0.

Proposition 4 :
Dans l'espace affine euclidien rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on note (P) le plan d'équation $2x+y-z+1=0$ et (d) la droite de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ et passant par le point A de coordonnées $(1~;~1~;~4)$.
Le plan (P) et la droite (d) ont un unique point commun.

Proposition 5 :
Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la pyramide SABCD de sommet S telle que :
- la base ABCD est un trapèze,
- les droites (AB) et (CD) sont parallèles,
- les droites (AB) et (BC) sont perpéildiculàires,
- la droite (SA) est perpendiculaire au plan (ABC).
- AB $=3a$, BC $=5a$, CD $=5a$ et SA $=7a$.

Le produit scalaire $\overrightarrow{\text{SB}} \cdot \overrightarrow{\text{SC}}$ est égal à $58a^2$.

Exercice 2

Une usine fabrique chaque jour un très grand nombre d'appareils électroniques. À l'issue de la fabrication, un système de contrôle permet de rejeter les appareils dont la qualité n'est pas jugée satisfaisante. Ce système n'est pas totalement fiable puisque certains appareils sont rejetés à l'issue du contrôle alors qu'ils sont en bon état de marche ; de même, certains appareils électroniques sont acceptés à l'issue du contrôle alors qu'ils sont défectueux.
Statistiquement on constate que, sur la production annuelle de cette usine :
- parmi les appareils qui franchissent avec succès l'étape du contrôle et qui sont mis en vente, 1 % s'avèrent défectueux,
- parmi les appareils qui ne franchissent pas avec succès l'étape du contrôle et qui sont rejetés, 2 % sont en fait en bon état de marche,
- 1,8 % des appareils fabriqués sont rejetés à l'issue du contrôle.

On suppose dans toute la suite de cet exercice que les trois proportions précisées ci-dessus s'appliquent également à chaque lot d'appareils électroniques fabriqués chaque jour par l'usine.

1. On dispose du lot des appareils fabriqués un jour donné. On prélève au hasard un appareil dans ce lot.

  a. Calculer la probabilité que cet appareil soit à la fois en bon état de marche et rejeté à l'issue du contrôle.

b. Calculer la probabilité que cet appareil soit à la fois défectueux et accepté à l'issue du contrôle.

c. Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur dans le contrôle de cet appareil.

2. On prélève, cinq fois de suite un appareil dans le lot des appareils fabriqués un jour donné. Le stock est suffisamment important pour que ce prélèvement puisse être assimilé à un prélèvement avec remise des appareils.

Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement deux appareils rejetés sur les cinq qui ont été prélevés ? Donner une valeur approchée décimale arrondie à 10^{-3} près du résultat.

Exercice 3

Cet exercice a pour objet l'étude d'une configuration du plan dans trois contextes différents.
Les parties I, II, et III sont indépendantes.

Partie I. Étude analytique dans le cas d'un triangle rectangle particulier

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On considère les points A(0 ; 1), B(−1 ; 1), F(2 ; 0) et E(2 ; −2).

1. Représenter sur la copie les points O, A, B, E et F sur une même figure.

2. Préciser sans justification les coordonnées des points C et D tels que lés quadrilatè es OABC et EFOb soient deux carrés. Placer les points C et 0 sur la figure de la question précédente.

3. On note H le point d'intersection des droites (AB) et (BF).

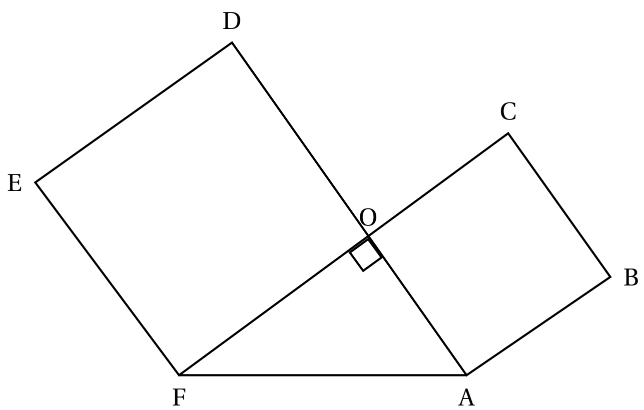
a. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

b. Déterminer les coordonnées du point H.

c. Vérifier que le point H appartient à la hauteur du triangle OFA issue du point O.

Partie II. Étude géométrique dans le cas d'un triangle rectangle quelconque

On se propose ici de démontrer dans un cas plus général le constat obtenu dans la dernière question de la partie I.
On considère donc un triangle AOF rectangle en O. On construit extérieurement au triangle AOF les carrés OABC et ODEF, comme l'indique la figure ci-dessous.



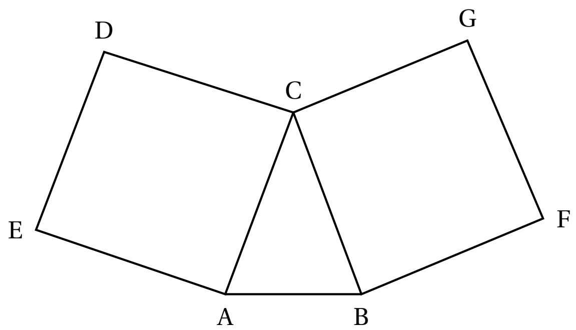
On note H le point d'intersection des droites (AB) et (BF). On se propose donc de prouver que le point H appartient à la hauteur du triangle AOF issue du point O.
Sur la hauteur du triangle AOF issue du point O, on considère le point G tel que GO = AF, les points G et O étant situés du même côté de la droite (AF).

1. Justifier que les triangles GOF et AFE sont isométriques.
2. En déduire que les droites (GF) et (AE) sont perpendiculaires.
3. On admet ici qu'on peut obtenir de même que les droites (GA) et (FB) sont perpendiculaires.

   Que représentent alors les droites (AE) et (BF) pour le triangle GAF.
4. Conclure.

Partie III. Étude dans le plan complexe dans le cas d'un triangle isocèle de sommet mobille

On se place dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère un nombre réel a strictement positif ainsi que les points A$(-1\ ;\ 0)$, B$(1\ ;\ 0)$ et C$(0\ ;\ a)$. Le triangle ABC est donc isocèle en C. On construit extérieurement au triangle ABC les carrés ACDE et CBFG comme l'illustre la figure çi-dessus.



Question : démontrer que le point d'intersection des droites (BD) et (AG) est un point fixe lorsque le nombre réel a varie dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. (On pourra utiliser la similitude directe de centre A qui transforme le point C en D.)

EXERCICE 4

Cet exercice a pour objet l'étude de deux suites permettant d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt[3]{2}$.
On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie I. Étude d'une fonction

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 2.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. **a.** Étudier les variations de la fonction f. On précisera en particulier la fonction dérivée, son signe et les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Les résultats seront consignés dans un tableau de variations.

   b. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution et une seule dans $\mathbb{R}$. Cette solution sera notée ρ dans toute la suite de l'exercice.

c. Avec la fonction TABLE d'une calculatrice on a obtenu les résultats suivants :
tblStart : -3
Δtbl = 1

x	y_1
-3	-29
-2	-10
-1	-3
0	-2
1	-1
2	6
3	25
4	62

En déduire un encadrement d'amplitude 1, entre deux nombres entiers, de ρ. Justifier la réponse. Obtenir à l'aide d'une calculatrice un encadrement d'amplitude 0,1 de ρ.

2. Soit a un nombre réel

a. Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.

b. En déduire que pour tout nombre réel non nul a, cette tangente coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est $b = \dfrac{1}{3}\left(2a + \dfrac{2}{a^2}\right)$.

3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\left[\sqrt[3]{2}\,;+\infty\right[$ par

$$g(x) = \frac{1}{3}\left(2x + \frac{1}{x^2}\right).$$

a. Montrer que $g\left(\sqrt[3]{2}\right) = \sqrt[3]{2}$.

b. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt[3]{2}\,;+\infty\right[$.

c. On reprend les notations de la question 2. Justifier que si $a > \sqrt[3]{2}$ alors $b > \sqrt[3]{2}$.

Partie II. Étude de deux suites

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et par la relation $u_{n+1} = g\left(u_n\right) = \dfrac{1}{3}\left(2u_n + \dfrac{2}{u_n^2}\right)$ valable pour tout nombre entier naturel n.

La suite (v_n) est définie par la relation $v_n = \dfrac{2}{u_n^2}$, valable pour tout nombre entier naturel n.

1. Donner sous forme de fraction irréductible les nombres réels v_0, u_1, v_1.

2. À l'aide de la calculatrice, tracer sur la copie la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-0,4\ ;\ 2,2]$ (on pourra choisir un repère orthogonal plutôt qu'un repère orthonormal) puis tracer avec soin la tangente à cette courbe aux points d'abscisse u_0 et u_1.

3. Le tableau ci-dessous a été obtenu à l'aide d'un tableur. Il comporte une valeur approchée des dix premiers termes de chacune des deux suites (u_n) et (v_n).

a. On dispose d'un tableur dans lequel les cellules de la colonne A ainsi que la cellule B2 sont déjà remplies comme celles du tableau ci-dessous, les autres cellules étant vides. Indiquer une formule qui, après avoir été saisie dans la cellule B3, permette, en glissant la poignée de recopie jusqu'à la cellule B11, d'obtenir les nombres figurant dans les cellules B3 à B11 du tableau ci-dessous.

	A	B	C
1	Valeurs de n	u_n	v_n
2	0	2,000000000000000	0,500000000000000
3	1	1,500000000000000	0,888888888888889
4	2	1,296296296296300	1,19020481632650
5	3	1,260932224741750	1,257901132214280
6	4	1,259921860565930	1,259919428554330
7	5	1,259921049895390	1,259921049893830
8	6	1,259921049894870	1,259921049894870
9	7	1,259921049894870	1,259921049894870
10	8	1,259921049894870	1,259921049894870
11	9	1,259921049894870	1,259921049894870

b. Indiquer trois conjectures concernant les suites (u_n) et (v_n) que l'on peut raisonnablement émettre à la lecture du tableau ci-dessus.

4. **a.** Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n > \sqrt[3]{2}$.

b. En déduire que pour tout nombre entier naturel n, on a $v_n < \sqrt[3]{2}$.

c. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire que la suite (v_n) est croissante.

d. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont toutes les deux convergentes, la première vers un reel que l'on notera ℓ, la seconde vers un réel que l'on notera ℓ'.

e. Prouver que l'on $\ell = \ell' = \sqrt[3]{2}$. Les deux Suites (u_n) et (v_n) sont-elles adjacentes ?

Partie III. Étude de la vitesse de convergence des deux suites

On se propose d'expliquer pourquoi, quand on examine les valeurs approchées calculées à l'aide du tableur, la convergence de u_n et de v_n vers $\sqrt[3]{2}$ semble si rapide.

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(2u_n + v_n)^3 - 27u_n^2 v_n}{27u_{n+1}^2}$.

2. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient le renseignement suivant :

$\text{factor}\left((2x+y)^3 - 27x^2y\right)$	$(x-y)^2(8x+y)$

Préciser l'égalité qui semble découler de ce renseignement puis vérifier cette égalité.

3. En déduire une factorisation de $u_{n+1} - v_{n+1}$.

4. Montrer que pour tout nombre entier naturel n, $8u_n + v_n \leqslant 9u_0$ et $u_{n+1}^2 > 1$.

5. En déduire que pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{3}(u_n - v_n)^2$.

6. On suppose que pour un certain nombre entier naturel n on a $0 \leqslant u_n - v_n \leqslant 10^{-p}$, où p est un nombre entier naturel fixé. Quel encadrement de $u_{n+1} - v_{n+1}$ peut-on alors en déduire ?

En déduire une explication de la rapidité de convergence des deux suites (u_n) et (v_n) vers leur limite commune.

7. Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel non nul n, on a $0 < u_n - v_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2^n - 1}$.

8. À partir de quelle valeur de l'entier n, les nombres u_n et v_n forment-ils un encadrement du nombre réel $\sqrt[3]{2}$ qui soit d'amplitude inférieure à 10^{-100} ?