CAPLP externe 2011 et CAFEP

DURÉE : 5 heures

Le sujet est constitué de quatre exercices indépendants

Le premier exercice est un test vrai-faux avec justification.
Le deuxième exercice porte sur des calculs de probabilités relatifs à des lancers de dés.
Le troisième exercice permet d'obtenir une caractérisation d'un triangle équilatéral à l'aide des affixes complexes de ses sommets, puis propose trois applications de cette caractérisation.
Le quatrième exercice propose l'étude de deux suites et le calcul d'une valeur approchée du nombre réel $\sqrt{2}$.

EXERCICE 1

Pour chacune des propositions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier votre réponse.
Dans tout l'exercice, $\mathbb{R}$ *désigne l'ensemble des nombres réels.*
Remarque : toute réponse non argumentée ne rapporte aucun point.

Proposition 1

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $[2\,;\,5]$.
Si $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_2^5 g(x)\,\mathrm{d}x$, alors pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[2\,;\,5]$, on a $f(x) \leqslant g(x)$.

Proposition 2

ABC est un triangle isocèle de sommet principal A. On suppose que la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$ coupe le segment [AC] en un point D tel que BCD est un triangle isocèle de sommet principal B. Une mesure en radian de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ est $\dfrac{\pi}{5}$.

Proposition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle I. Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.

Proposition 4

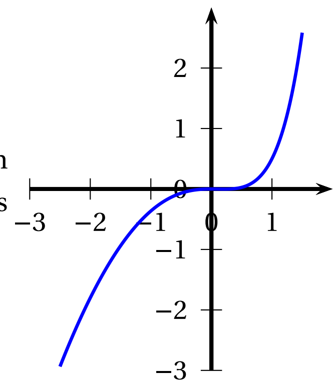
On considère l'équation différentielle suivante, où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$y' - 2y - 1 = 0 \quad (E)$$

On note g une fonction positive définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Si g est solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$, alors g est croissante sur $\mathbb{R}$.

Proposition 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\text{e}^{x-1} - \dfrac{x^2}{2}$. Un grapheur donne pour courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal le graphique ci-contre.



La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-2\ ;\ 1]$.

Proposition 6

Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2, et soient A et B deux matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients réels. Alors on a :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

EXERCICE 2

Tous les dés de cet exercice sont des dés cubiques à six faces numérotées de 1 à 6.

Partie I.

1. On considère un dé non pipé. On le lance n fois, où n est un nombre entier naturel non nul.
   a. On note a_n la probabilité pour que le 6 sorte au moins une fois lors de ces n lancers. Déterminer la probabilité a_n en fonction de n. Quelle est la limite de a_n quand n tend vers l'infini ?
   b. Déterminer la plus petite valeur de n telle que $a_n > 0,5$.
2. On considère deux dés non pipés, que l'on lance ensemble n fois.
   a. Quelle est la probabilité b_n d'obtenir au moins une fois un double six lors de ces n lancers ?
   b. Déterminer la plus petite valeur de n telle que $b_n > 0,5$.
3. Le texte suivant est un extrait d'une lettre de Pascal à Fermat datée du 29 juillet 1654 :
   « *Je n'ai pas eu le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. de Méré, car il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre (...). Il me disait donc qu'il avait trouvé fausseté dans les nombres par cette raison :*
   Si on entreprend de faire un six avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, *comme de* 671 *à* 625.
   Si on entreprend de faire Sonnez avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24.
   Et néanmoins 24 *est à* 36 *(qui est le nombre des faces de deux dés) comme 4 à* 6 *(qui est le nombre des faces d'un dé).*
   Voilà quel était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions

n'étaient pas constantes et que l'arithmétique se démentait : mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes. »

Vocabulaire :

« *faire Sonnez* », c'est obtenir un double 6 en lançant deux dés ;

« *Entreprendre en 4* » signifie que l'on tente d'obtenir un résultat en effectuant 4 lancers successifs ;

enfin Pascal parle d'« *avantage* » pour un évènement donné lorsque sa probabilité dépasse 1/2.

a. Expliquer la phrase suivante à la lumière des calculs du 1. :

« *Si on entreprend de faire un six avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en* 4, *comme de* 671 *à* 625. »

b. En s'appuyant sur les calculs du 2., dire ce que signifie la phrase : « *Si on entreprend de faire Sonnez avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en* 24. »

c. Pourquoi, selon Pascal, le chevalier de Méré s'attendait-il à avoir le même résultat ?

Partie II.

On dispose de deux dés physiquement indiscernables, l'un non pipé, l'autre pipé pour lequel la probabilité d'obtenir 6 est de $0,40$. On prend un de ces deux dés au hasard, chacun ayant une probabilité $0,5$ d'être pris, et on le lance.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 à l'issue d'un lancer ?
2. On a obtenu 6 à l'issue d'un lancer. Quelle est la probabilité d'avoir utilisé le dé pipé ?
3. Si, après avoir pris un dé au hasard, on lance ce dé trois fois de suite, quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois 6 ?

Partie III.

On considère maintenant un dé pipé pour lequel la probabilité d'obtenir 6 est inconnue et notée q (q étant un nombre réel de l'intervalle $[0\,;\ 1]$). On jette le dé 18 fois. On considère la variable aléatoire X égale au nombre de 6 obtenus lors de ces 18 lancers.

1. **a.** Quelle est la loi de X ? Justifier la réponse.
   b. Calculer $p(X = 7)$ dans le cas où $q = 0,25$. Arrondir le résultat à 10^{-3} près.
2. On désire maintenant déterminer la plus petite valeur du nombre réel q pour laquelle la probabilité que le 6 sorte au moins 4 fois lors des 18 lancers soit supérieure ou égale à 99 %.

   a. Montrer que la probabilité que X soit inférieure ou égale à 3 est égale à :

   $$p(X \leqslant 3) = (1-q)^{15}\left(680q^3 + 120q^2 + 15q + 1\right).$$

   b. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

   $$f(x) = (1-x)^{15}\left(680x^3 + 120x^2 + 15x + 1\right).$$

   On admet que f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   — Montrer qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $f(x_0) = 0,01$.

— À l'aide d'une calculatrice, déterminer l'entier naturel k tel que $\dfrac{k}{1\,000} < x_0 < \dfrac{k+1}{1\,000}$.

c. En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à q afin que la probabilité que le 6 sorte au moins 4 fois lors des 18 lancers soit supérieure ou égale à 99 %.

Partie IV.

On considère maintenant un dé dont on ne sait pas a priori s'il est pipé ou non. Pour le tester, on le jette $n = 150$ fois et on relève les résultats obtenus dans le tableau suivant :

Face	1	2	3	4	5	6	
Effectif	21	15	24	27	21	42	150
Fréquence	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	100 %

1. a. Calculer f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6.

b. On se propose d'examiner ces fréquences pour étudier dans quelle mesure elles peuvent, ou non, être obtenues par un dé non pipé.

Calculer le nombre :

$$nd^2 = n\left(f_1 - \frac{1}{6}\right)^2 + n\left(f_2 - \frac{1}{6}\right)^2 + n\left(f_3 - \frac{1}{6}\right)^2 + n\left(f_4 - \frac{1}{6}\right)^2 + n\left(f_5 - \frac{1}{6}\right)^2 + n\left(f_6 - \frac{1}{6}\right)^2.$$

où $n = 150$ est le nombre de fois où le dé a été lancé.

Ce nombre nd^2 « mesure »la distance entre la série des fréquences observées lors du test et la série des fréquences théoriques attendues pour un dé non pipé.

2. On simule 150 lancers d'un dé non pipé à l'aide d'un tableur et pour chaque série de 150 lancers, on calcule le nombre nd^2.

a. Indiquer la formule à saisir dans la cellule B1 pour simuler un jet d'un dé non pipé.

b. Pour simuler 150 lancers, la formule est recopiée de la cellule B1 à la cellule B150. Dans les cellules B152, B153, B154, B155, B156 et B157 figurent les fréquences d'apparition des numéros 1, 2, 3, 4, 5 et 6 pour la simulation de 150 lancers : ainsi le 1 a été obtenu dans 16 % des cas dans l'exemple ci-contre.

— Expliquer la formule qui figure dans la cellule B152 :

=NB.SI(B$1 :B$150;1)/150

— Donner une formule à inscrire dans la cellule B159 pour calculer le nombre nd^2 correspondant à la simulation des 150 lancers.

	A	B
144		3
145		2
146		5
147		6
148		5
149		3
150		3
151		
152	Fréquence des 1	0,16
153	Fréquence des 2	0,14
154	Fréquence des 3	018
155	Fréquence des 4	0,186 666 67
156	Fréquence des 5	0,123
157	Fréquence des 6	0,193 333 33
158		
159	Valeur de nd^2	

c. On répète 1 000 fois la simulation des 150 lancers. Les différentes valeurs de nd^2 obtenues sont représentées par le nuage de points ci-après, avec en abscisse le rang de L'expérience de 1 à 1000 et en ordonnée la valeur de nd^2 obtenue.

Le 99e centile de la série des différentes valeurs de nd^2 représentée par le nuage de points est de 2,693 selon le tableur.

Quelle interprétation peut-on donner de ce résultat ?

3. Le tableur donne aussi les résultats statistiques suivants pour la série des nombres nd^2 calculés pour les 1000 simulations de 150 lancers (c1 désigne le premier centile, d1 le premier décile, d2 le second décile, ...)

FJ	FK	FL	FM	FN	FO	FP	FQ	FR	FS	FT	FU	FV
moyenne	écart-type	c1	d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8	d9	c99
0,819 21	0,521 561	0,12	0,265	0,387	0,493	0,587	0,72	0,853	1	1,173	1,493	2,693

Quelle conclusion peut-on en tirer sur le dé étudié à la question 1 de la partie IV ?

EXERCICE 3

Partie I.

Dans cette partie, on se place dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

1. On note j le nombre complexe $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$?
   - **a.** Montrer que $\overline{j} = j^2$.
   - **b.** Montrer que $j^3 = 1$.
   - **c.** Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
   - **d.** Déterminer le module et un argument du nombre complexe $w = -j^2$.
   - **e.** Donner la forme algébrique de j et de $\overline{j}$.
2. On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c.
   - **a.** Soit R la rotation de centre B et d'angle $\pi/3$.
     Montrer que si M est un point d'affixe z, $R(M)$ a pour affixe $-j^2z - jb$.
   - **b.** En déduire que, pour qu'un triangle de sommets A, B et C d'affixes respectives a, b et c soit équilatéral direct il faut et il suffit que $a + bj^2 + cj = 0$.
   - **c.** Montrer que pour qu'un triangle de sommets A, B et C d'affixes respectives a, b et c soit équilatéral indirect il faut et il suffit que $a + bj^2 + cj = 0$.
   - **d.** Montrer qu'un triangle de sommets A, B et C d'affixes respectives a, b et c est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$, et que cette dernière égalité peut aussi s'écrire $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$.

Partie II.

Nous nous proposons dans cette partie de développer trois applications des résultats précédents.

1. **Première application**

   On se place dans le plan complexe.

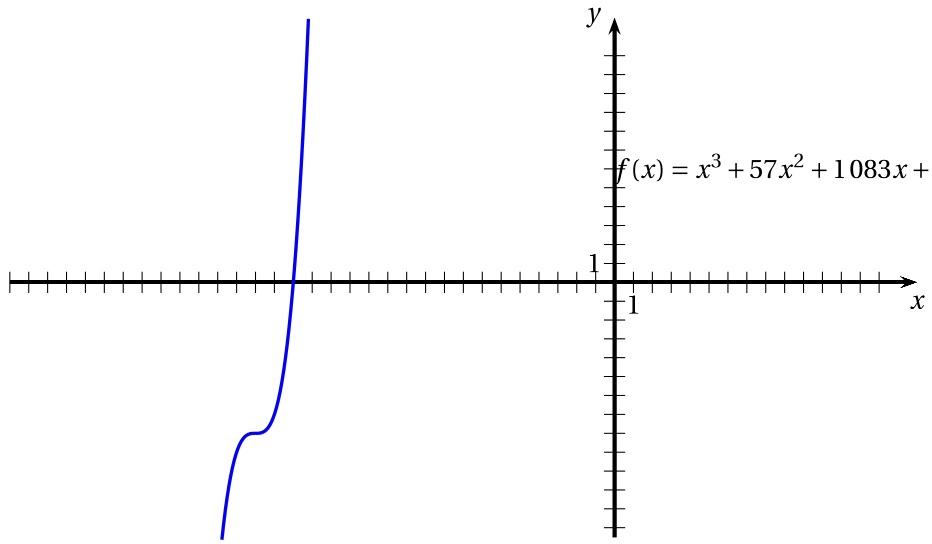
   Déterminer le(s) nombre(s) complexe(s) z pour le(s)quel(s) le triangle de sommets d'affixe i, z et iz est équilatéral direct.

2. Deuxième application

On considère la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 57x^2 + 1\,083x + 6\,851.$$

La représentation graphique ,de la fonction f réalisée par un grapheur est donnée ci-après :



a. Par simple lecture graphique, que peut-on conjecturer sur les solutions réelles de l'équation $f(x) = 0$?

b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution réelle entière n.

c. Déterminer les coefficients réels pet q tels que pour tout nombre réel x, on ait :

$$x^3 + 57x^2 + 1\,083x + 6\,851 = (x - n)\left(x^2 + px + q\right).$$

d. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $f(x) = 0$. Les calculs seront détaillés sur la copie.

e. Montrer que les trois solutions complexes de l'équation $f(x) = 0$ sont les affixes de points formant un triangle équilatéral.

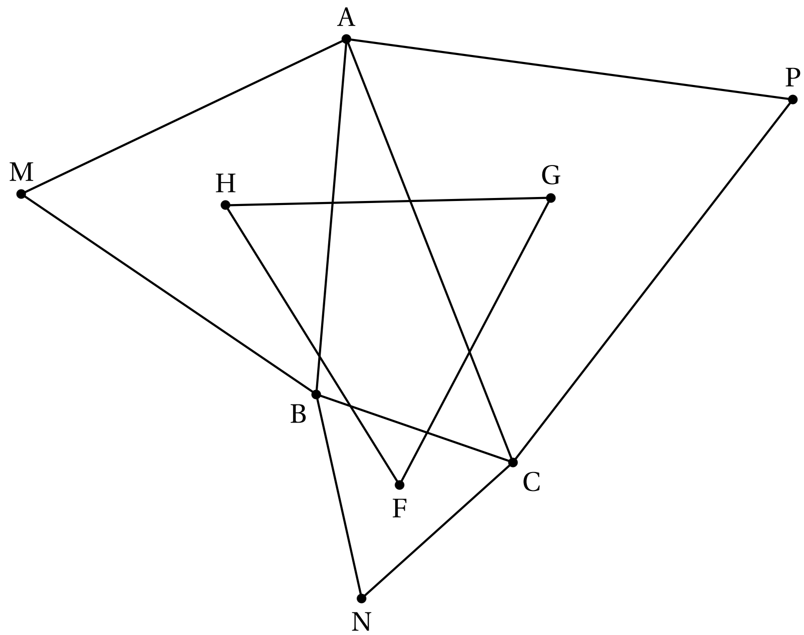
f. Plus généralement, à quelle condition nécessaire et suffisante sur les nombres réels α, β, δ, les trois solutions complexes de l'équation $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \delta = 0$ sont-elles les affixes de points formant un triangle équilatéral ?

3. Troisième application

On se place dans le plan complexe. On considère un triangle quelconque ABC direct. Comme le montre la figure ci-après, on construit extérieurement à ce triangle les triangles équilatéraux (directs) AME, BNC et CPA.

On appelle H le centre de gravité du triangle AME, F le centre de gravité du triangle BNC et G le centre de gravité du triangle CPA.

On désigne les affixes des points par les lettres minuscules qui leur correspondent : A a pour affixe a, B a pour affixe b, etc.



a. Exprimer m et h en fonction de a, b et de j.

b. Sans justifier, préciser les affixes f de F et g de G.

c. Montrer que le triangle FGH est équilatéral et direct.

EXERCICE 4

On note f la fonction qui à tout nombre réel x positif ou nul associe le nombre réel $f(x) = x^2 - 2$. On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan, B le point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses et A le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse 1.

Partie 1. Utilisation de la méthode de la corde

La méthode de la corde consiste à construire de proche en proche une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de la courbe $(\mathscr{C})$ de la manière suivante :

- M_0 est un point quelconque de la courbe $(\mathscr{C})$, distinct des points A et B ;
- pour tout nombre entier naturel n, M_{n+1} est le point de la courbe $(\mathscr{C})$ de même abscisse que le point d'intersection de la droite $(\mathrm{A}M_n)$ avec l'axe des abscisses.

Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n l'abscisse du point M_n. On admet ici que cette méthode permet bien de construire une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de la courbe $(\mathscr{C})$ qui sont tous distincts du point A et dont les abscisses vérifient pour tout nombre entier naturel n, la relation :

$$u_{n+1} = \frac{2+u_n}{1+u_n}$$

On suppose de plus que $u_0 = 2$.

Afin d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par la relation :

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$$

1. Déterminer les nombres u_1 et u_2.

2. Vérifier que le nombre $\dfrac{v_1}{v_0}$ est un nombre réel négatif qui peut se mettre sous la forme $a\sqrt{2} - b$ avec a et b nombres entiers naturels non nuls.

3. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique ; en préciser la raison q.

4. Préciser l'expression de v_n en fonction du nombre entier naturel n.

5. Préciser, en la justifiant, la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.

6. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Partie II. Utilisation de la méthode de Newton

On se fixe un réel a_0 strictement positif. La méthode de Newton consiste à construire de proche en proche une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de la courbe $(\mathscr{C})$ de la manière suivante :

- Po est le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse a_0 ;
- pour tout nombre entier naturel n, P_{n+1} est le point de la courbe $(\mathscr{C})$ de même abscisse que le point d'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point P_n.

Pour tout nombre entier naturel n, on note a_n l'abscisse du point P_n. On admet ici que cette méthode permet bien de construire une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de la courbe $(\mathscr{C})$ dont les abscisses sont strictement positives.

1. a. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ en un point P_n.

b. Justifier alors que, pour tout nombre entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right).$$

Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par son premier terme $a_0 > 0$ et par la relation précisée ci-dessus et qui est valable pour tout entier naturel n.

2. On considère la fonction g définie, pour tout nombre réel x strictement positif, par :

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

a. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur cet intervalle.

b. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n non nul, $a_{il\ .n} \geqslant \sqrt{2}$.

c. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1, et en déduire qu'elle admet une limite réelle.

d. Déterminer la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.

3. Cette question a pour but de préciser la rapidité de la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela, on considère la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$b_n = \frac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}} \quad \text{pour tout nombre entier naturel } n.$$

a. Vérifier que $b_{n+1} = (b_n)^2$ pour tout nombre entier naturel n.

b. En déduire une expression du nombre b_n en fonction du nombre entier naturel n et de b_0.

c. On suppose dans cette question que $a_0 = \dfrac{3}{2}$ et on admet qu'alors on a $0 < b_0 \leqslant 0,04$.

— Montrer que pour tout nombre entier naturel n, on a

$$0 \leqslant a_n - \sqrt{2} \leqslant 3(0,04)^{(2^n)}.$$

— En déduire un rang n_0 à partir duquel le nombre a_{n_0} est une valeur approchée du nombre réel $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près. Donner cette valeur approchée.