

∞ Concours de recrutement interne ∞  
PLP 2009

*Le sujet est constitué de quatre exercices indépendants.*

*Le premier exercice, de nature pédagogique au niveau du baccalauréat professionnel, porte sur le flocon de Von Koch.*

*Le deuxième exercice est vrai-faux.*

*Le troisième exercice a pour objet l'étude d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale.*

*Le quatrième exercice propose une application de la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle et de la notion d'axe radical de deux cercles.*

## Exercice 1

Un enseignant d'une classe de baccalauréat industriel a préparé une séquence de trois séances portant sur le flocon de Von Koch.

Pour chacune de ces trois séances, chaque partie de l'exercice commence par les instructions et/ou questions destinées aux élèves puis sont énoncées les questions destinées aux candidats du concours CAPLP interne Ou du CAER.

Des extraits de programme se trouvent à la fin de l'exercice.

<b>Première séance : figure de base du flocon de Von Koch</b>
---

La première séance de la séquence consiste à faire travailler les élèves sur un logiciel de géométrie dynamique. L'enseignant donne aux élèves les consignes suivantes :

Séance 1 : Macro de la figure de base de Von Koch
---

- |  |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"><li>1. Placer deux points distincts A et B.</li><li>2. Construire le point C image du point B par la rotation de centre A et d'angle <math>60^\circ</math>.</li><li>3. Construire le centre de gravité G du triangle ABC.</li><li>4. La parallèle à [AC] passant par G coupe le segment [AB] en F.</li><li>5. La parallèle à [BC] passant par G coupe le segment [AB] en H.</li><li>6. Créer le segment [AF], puis les segments [FG], [GH] et [HB].</li><li>7. Masquer tout ce qui a été dessiné sauf les segments [AF], [FG], [GH] et [HB].</li><li>8. Enregistrer la macro permettant de faire correspondre aux points A et B la ligne brisée AFGHB.</li></ol> |
|--|

## Questions destinées aux candidats du concours CAPLP interne ou du CAER

### Question 1

Dessiner sur la copie la figure que doivent finalement obtenir les élèves à l'écran ; vous y ferez apparaître en plus les noms des points A, F, G, H et B.

### Question 2

Montrer que les segments [AF], [FG], [GH] et [HB] sont de même longueur égale au tiers de la longueur du segment [AB].

## Deuxième séance : construction et étude des premiers flocons

Durant cette séance, les élèves doivent d'abord construire des flocons à l'aide du logiciel de géométrie et de la macro enregistrée lors de la première séance, puis répondre à une série de questions.

### 1. Construction de flocons avec un logiciel de géométrie dynamique

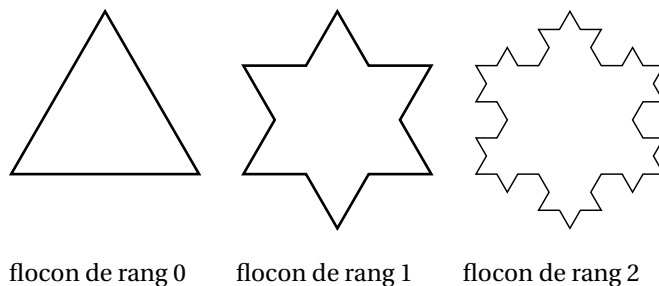
Le professeur donne aux élèves les renseignements suivants :

Le « flocon de rang 0 » est un triangle équilatéral de 9 cm de côté.

Le flocon de rang 1 (voir figure ci-après) est obtenu en appliquant trois fois au flocon de rang 0 la macro enregistrée à l'issue de la première séance.

Le flocon de rang 2 (voir figure ci-après) est obtenu en appliquant douze fois au flocon de rang 1 la macro enregistrée à l'issue de la première séance.

Le flocon de Von Koch est la « limite » des flocons obtenus, lorsqu'on répète indéfiniment les étapes mentionnées ci-dessus.



## 2. Étude des premiers flocons

L'enseignant souhaite que ses élèves réfléchissent aux questions ci-dessous à l'aide des figures qu'ils ont réalisées.

Soit  $C_n$  le nombre de côtés du flocon de rang  $n$ .

Soit  $L_n$  la longueur d'un côté du flocon de rang  $n$ .

Soit  $P_n$  le périmètre du flocon de rang  $n$ .

a. Remplir le tableau suivant

Rang $n$	Nombre de côtés $C_n$	Longueur d'un côté $L_n$	Périmètre du flocon $P_n$
0	3	9	
1			
2			

b. Comment pourrait-on procéder pour calculer le périmètre du flocon de rang 6 ?

### Questions destinées aux candidats du concours CAPLP interne ou du CAER

**Question 3 :** Préciser la nature de chacune des suites  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Question 4 :** À quels objectifs cette séance peut-elle répondre ?

**Question 5 :** Concernant la question « 2. Comment pourrait-on procéder pour calculer le périmètre du flocon de rang 6 ? », voici ci-dessous deux réponses orales d'élèves :

Réponse 1 : « On dessine le flocon de rang 6 sur papier et on mesure le périmètre avec une règle. »

Réponse 2 : « On continue le tableau jusqu'à la ligne correspondant au flocon de rang 6. »

Que peut répondre le professeur à chacune de ces deux affirmations ?

### Troisième séance : étude des caractéristiques des flocons

L'enseignant a réalisé sur un tableur le tableau ci-dessous et le projette à ses élèves puis en discute avec eux.

	A	B	C	D
1	rang $n$	nombre de côtés $C_n$	longueur d'un côté $L_n$	périmètre du flocon $P_n$
2	0	3	9	27
3	1	12	3	36
4	2	48	1	48
5	3	192	0,333 333 33	64
6	4	768	0,111 111 11	85,333 333 3
7	5	3 072	0,037 037 04	113,777 778
8	6	12 288	0,012 345 68	151,703 704
9	7	49 152	0,004 115 23	202,271 605
10	8	196 608	0,001 371 74	269,695 473
11	9	786 432	0,000 457 25	359,593 964
12	10	3 145 728	0,000 152 42	479,458 619

### Questions destinées aux candidats du concours CAPLP interne ou du CAER

La notion de limite de suite n'est pas au programme de la classe concernée, mais l'enseignant désire mettre en évidence des résultats remarquables concernant l'évolution du périmètre et de l'aire d'un flocon de rang  $n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

#### Question 6 concernant l'évolution du périmètre d'un flocon :

- Quelle est la limite du périmètre  $P_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ? Justifier le résultat.
- Comment pourrait-on amener les élèves à pressentir ce résultat?
- Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que le flocon de rang  $n$  ait un périmètre supérieur ou égal à 9 km (on rappelle qu'on part d'un triangle de côtés mesurant 9 cm).

#### Question 7 concernant l'évolution de l'aire du domaine délimité par un flocon :

On note  $\mathcal{A}_n$  l'aire, exprimée en  $\text{cm}^2$  du domaine délimité par le flocon de rang  $n$ .

- L'enseignant fait tracer aux élèves sur l'écran de l'ordinateur le cercle circonscrit au flocon de rang 0 et leur fait constater que les flocons de rangs 1, 2, 3, 4 sont à l'intérieur de ce cercle. Quel résultat sur l'aire d'un flocon peut-il ainsi faire pressentir aux élèves?
- Que vaut  $\mathcal{A}_0$  (on rappelle qu'on part d'un triangle équilatéral de côtés de longueur 9 cm)?
- Obtenir une formule exprimant l'aire  $\mathcal{A}_{n+1}$  en fonction de l'entier naturel  $n$  et de l'aire  $\mathcal{A}_n$ .
- En déduire une valeur approchée de  $\mathcal{A}_6$  au millimètre carré près.

## Extraits du programme de baccalauréat professionnel ACTIVITÉS NUMÉRIQUES ET GRAPHIQUES

La résolution de problèmes issus de la géométrie, de l'étude des fonctions, des autres disciplines et de la vie courante constitue un objectif fondamental de cette partie du programme. On dégagera sur les exemples étudiés les différentes phases de la résolution d'un problème :

- analyse de l'énoncé conduisant au choix de la méthode, si elle n'est pas imposée ;
- mise en œuvre de la méthode (résolution) et contrôle des différentes étapes ;
- vérification, exploitation et présentation des résultats.

Dans cette perspective, il convient de répartir les activités tout au long de l'année et d'éviter toute révision systématique a priori. Les travaux s'articulent suivant trois axes :

- consolider les techniques élémentaires de calcul ;
- consolider la pratique conjoint. du calcul littéral et du calcul numérique, en relation étroite avec l'étude des fonctions ;
- poursuivre l'étude des équations et inéquations à une inconnue et des systèmes linéaires d'équations et d'inéquations.

Il convient d'exploiter conjointement les aspects graphiques, numériques et algébriques, ainsi que l'étude de variations de fonctions : les activités doivent combiner les expérimentations graphiques et numériques, avec les justifications adéquates. Pour toutes ces questions, la calculatrice est un outil efficace. Il convient d'exploiter également les possibilités de l'outil informatique.

<p><b>a. Suites arithmétiques et géométriques</b> Notation <math>u_n</math> Expression du terme de rang <math>n</math> Somme des <math>k</math> premiers termes.</p>	<p>Il s'agit de consolider les acquis antérieurs. L'objectif est de familiariser les élèves avec la description de situations simples conduisant à des suites arithmétiques ou géométriques.</p>
<p><b>b. Polynômes du second degré</b> Résolution algébrique de l'équation du second degré : factorisation d'un polynôme du second degré.</p>	<p>L'existence de solutions est à mettre en évidence d'une part graphiquement, d'autre part algébriquement, à partir d'exemples où les coefficients sont numériquement fixés. L'élève doit savoir utiliser les formules de résolution : ces formules sont admises.</p>

### *Champ des activités*

<p>Exemples d'étude de situations conduisant à des suites arithmétiques ou géométriques. Résolution algébrique d'une équation du second degré. Exemples d'étude de situations conduisant à une équation ou une inéquation à une inconnue. Résolutions graphique et algébrique d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues. Exemples d'étude de situations conduisant à des systèmes linéaires d'équations ou d'inéquations à deux inconnues à coefficients numériques fixés.</p>	<p>Le recours aux formules générales est à éviter si la factorisation est donnée ou immédiate. La résolution d'une inéquation peut s'effectuer graphiquement ou en utilisant un tableau de signes ; si le degré excède deux) des indications doivent être fournies. Des exemples simples de programmation linéaire peuvent être choisis, toutes les indications nécessaires étant fournies.</p>
---	---

## ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

Mettant en oeuvre les connaissances de géométrie ou de trigonométrie du programme de BEP, cette partie ne comporte que la rubrique « Champ des activités ». En outre, elles peuvent constituer un support pour les notions nouvelles du programme.

### Champ des activités

Exemples d'étude de problèmes liés à la profession, faisant intervenir dans le plan des constructions géométriques de configurations simples des transformations géométriques (symétrie axiale, symétrie centrale, translation) ou conduisant à des calculs simples de distances, d'angles, d'aires. Exemples d'étude de solides usuels ,conduisant à l'utilisation de sections planes ou à des calculs de distances, d'angles, d'aires ou de volumes.	Toutes les indications utiles doivent être fournies.  Toutes les indications utiles doivent être fournies.
---	--

### Exercice 2

Indiquer, pour chacune des affirmations indépendantes qui suivent, si elle est vraie ou fausse, puis justifier votre réponse.

1. Si une pièce est truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir PILE soit égale à trois fois celle d'obtenir FACE, alors la probabilité d'obtenir FACE vaut  $\frac{1}{6}$ .
2. Dans deux classes de 25 élèves d'un lycée professionnel, on dispose des pourcentages de réussite au baccalauréat professionnel de juin 2008 des garçons et des filles de ces deux classes :

	filles	garçons
Terminale 1	80 %	60 %
Terminale 2	75 %	40 %

Ainsi, 80 % des filles de Terminale 1 ont eu le bac ainsi que 60 % des garçons de Terminale 1, 75 % des filles de Terminale 2 et 40 % des garçons de Terminale 2. L'affirmation est la suivante : « Quelle que soit la répartition filles-garçons de chacune de ces deux classes de 25 élèves, on peut déduire du tableau ci-dessus que le pourcentage de réussite au baccalauréat professionnel des élèves de Terminale 1 est supérieur à celui des élèves de Terminale 2 ».

3. Si A et B sont deux évènements de probabilités non nulles, on note  $P(B / A)$  la probabilité de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé.  
L'affirmation est la suivante : « Si A et B sont deux évènements de probabilités non nulles, alors  $P(B/A) \times P(A/B) = 1$ . »
4. Pour ouvrir une porte, un individu dispose de 10 clés différentes dont une seule pennet d'ouvrir cette porte. Il choisit une clé au hasard, essaie d'ouvrir la porte et, s'il n'y parvient pas, met la clé de côté pour ne pas la réutiliser.  
« La variable aléatoire X indiquant le nombre total de clés essayées (la bonne comprise) suit une loi binomiale. »

**Exercice 3**

On rappelle que si  $f$  est une fonction définie et continue sur un intervalle  $I$ , alors, quels que soient les nombres réels  $a$  et  $b$  appartenant à l'intervalle  $I$ , l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  est définie.

On note  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.

**I. Quelques propriétés d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale**

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . On lui associe la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} g(x) = \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \geq 0, \\ g(x) = \int_x^0 f(t) dt & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. On suppose dans cette question que  $f(t) = 1$  pour tout nombre réel  $t$ . Déterminer alors, pour tout nombre réel  $x$ , l'expression de  $g(x)$ . Étudier la parité de la fonction  $g$ .
2. On suppose dans cette question que  $f(t) = |t|$  pour tout nombre réel  $t$ . Déterminer alors, pour tout nombre réel  $x$ , l'expression de  $g(x)$ . Tracer sur la copie la courbe représentative de la fonction  $g$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal.
3. On revient au cas général, c'est-à-dire que  $f$  est une fonction définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
  - a. On admet que la fonction  $g$  est dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ . Préciser sa dérivée sur cet intervalle.
  - b. Illustrer graphiquement puis démontrer que si la fonction  $f$  est paire, alors la fonction  $g$  est paire. (on peut par exemple utiliser un changement de variables)

**II. Étude d'une fonction  $f$  et de la fonction  $g$  associée**

On considère désormais la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} f(x) = -x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ f(x) = 0 & \text{si } x > 1, \\ f & \text{est paire.} \end{cases}$$

On lui associe la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} g(x) = \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \geq 0, \\ g(x) = \int_x^0 f(t) dt & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

1. Étude de la fonction  $f$ 
  - a. Montrer que la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
  - b. Tracer sur la copie la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal.
2. Étude de la fonction  $g$ 
  - a. Étudier le sens de variation et le signe de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - b. Expliciter  $g(x)$  en fonction de  $x$  lorsque  $x$  appartient à l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
  - c. Tracer sur la copie la courbe représentative de la fonction  $g$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal (on précisera les demi-tangentes à la courbe aux points d'abscisse 0 et 1).
  - d. Montrer que, quels que soient les nombres réels  $x$  et  $y$  positifs ou nuls, on a l'inégalité :

$$g(x + y) \leq g(x) + g(y).$$

On admet dans la suite de cet exercice que l'inégalité  $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$  est vérifiée plus généralement quels que soient les nombres réels  $x$  et  $y$ .

**3. Étude d'une fonction distance**

On considère la fonction  $d$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $d(x; y) = |x - y|$ .

- a. Montrer que la fonction  $d$  est une distance sur  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire que, quels que soient les nombres réels  $x, y$  et  $z$ , les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}d(x, y) &\geq 0; \\d(x, y) &= 0 \text{ équivaut à } x = y; \\d(x, y) &= d(y, x); \\d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y).\end{aligned}$$

- b. Soient  $x_0$  un nombre réel quelconque et  $r$  un nombre réel strictement positif. On note  $I(x_0, r)$  l'ensemble des nombres réels  $x$  tels que  $d(x_0, x) < r$ . Déterminer  $I(x_0, r)$  dans chacun des cas suivants :

- i.  $x_0 = 0$  et  $r = 1$ .
- ii.  $x_0 = 0$  et  $r = \frac{3}{8}$ .
- iii.  $x_0 = 1$  et  $r = \frac{3}{8}$ .

**Exercice 4**

Dans cet exercice on ne considère que des cercles non réduits à un point.

**I. Définition de la puissance d'un point par rapport à un cercle**

On considère dans le plan :

- un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $R > 0$ ,
- un point  $M$  quelconque.

1. Soit  $\Delta$  une droite passant par  $M$  et coupant  $\mathcal{C}$  en deux points  $A$  et  $B$  distincts tels que le point  $A$  soit différent du point  $M$ .

On note  $D$  le point du cercle  $\mathcal{C}$  diamétralement opposé au point  $A$ .

Montrer que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD}$  puis que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = M\Omega^2 - R^2$ .

De ce fait, le produit scalaire  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$  est donc indépendant du choix de la sécante  $\Delta$  passant par le point  $M$ . Le nombre réel  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = M\Omega^2 - R^2$  est appelé puissance du point  $M$  par rapport au cercle  $\mathcal{C}$ .

2. On suppose, dans cette question, que le point  $M$  est extérieur au cercle  $\mathcal{C}$ .

On note  $T$  le point de contact d'une tangente au cercle  $\mathcal{C}$  menée par  $M$ .

Montrer que  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = MT^2$ .

3. Décrire l'ensemble  $\mathcal{E}_1$ , (resp.  $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$  des points  $M$  du plan tels que  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = 0$  (resp.  $< 0, > 0$ ).

**II. Axe radical de deux cercles de centres distincts et application**

L'objet de cette seconde partie est de prouver que l'ensemble des points ayant même puissance par rapport à deux cercles est une droite (que l'on appellera axe radical des deux cercles) puis de déterminer cet axe radical dans trois cas de figure et enfin d'utiliser l'axe radical de deux cercles pour prouver l'alignement de quatre points particuliers.

1. Étude générale de l'axe radical de deux cercles

On considère dans le plan :

- un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $R > 0$ ,
- un cercle  $\mathcal{C}'$  de centre  $\Omega'$  et de rayon  $R'$  tel que  $\Omega \neq \Omega'$  et  $0 < R' \leq R$ .
- le milieu  $I$  du segment  $[\Omega\Omega']$ .



- a. Montrer que pour tout point  $M$  du plan,  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = \mathcal{P}_{\mathcal{C}'}(M)$  équivaut à  $2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{\Omega'\Omega} = R^2 - R'^2$ .
- b. Justifier qu'il existe un point  $M_0$  de la droite  $(\Omega\Omega')$  vérifiant  $2\overrightarrow{M_0I} \cdot \overrightarrow{\Omega'\Omega} = R^2 - R'^2$ .
- c. Dédire des résultats précédents que l'axe radical des deux cercles, c'est-à-dire l'ensemble des points  $M$  tels que  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = \mathcal{P}_{\mathcal{C}'}(M)$  est la droite passant par  $M_0$  et perpendiculaire à la droite  $(\Omega\Omega')$ .

2. Recherche de l'axe radical dans trois cas de figure

On considère dans le plan :

- un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $R > 0$ .
- un cercle  $\mathcal{C}'$  de centre  $\Omega'$  et de rayon  $R'$  tel que  $\Omega \neq \Omega'$  et  $0 < R' \leq R$ .

- a. On suppose que les cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont sécants en deux points distincts  $J$  et  $K$ . Montrer que l'axe radical des cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  est la droite  $(JK)$ .
- b. On suppose que les cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont tangents en un point  $L$ . Déterminer l'axe radical des cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ .
- c. On suppose que les cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  n'ont aucun point commun. Soit un cercle  $\mathcal{C}''$  sécant à la fois au cercle  $\mathcal{C}$  et au cercle  $\mathcal{C}'$  et dont le centre  $\Omega''$  n'appartient pas à la droite  $(\Omega\Omega')$ .

Justifier que l'axe radical des cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  et l'axe radical des cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}''$  sont sécants; on note  $S$  leur point d'intersection. Déterminer l'axe radical des cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ .

3. On considère dans le plan deux cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ , non sécants, extérieurs l'un de l'autre.

Ces deux cercles ont quatre tangentes communes, notées  $(T_i T'_i)_{1 \leq i \leq 4}$ , où  $T_i$  et  $T'_i$  sont les points de contact respectifs de la tangente  $(T_i T'_i)$  avec les cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ .

On note  $M_i$  le milieu du segment  $[T_i T'_i]$ . Montrer que les points  $M_1, M_2, M_3$ , et  $M_4$  sont alignés.