Baccalauréat STT CG-IG Centres étrangers juin 2004

EXERCICE 1 **5 points**

Un gérant décide de visualiser l'évolution des bénéfices réalisés depuis le nouvel aménagement de sa crêperie en 1999. Il souhaite établir des prévisions sur les bénéfices à venir.

1er Tableau

Années	1999	2000	2001	2002	2003
x_i : nombre d'années depuis le nouvel aménagement	1	2	3	4	5
b_i : bénéfices réalisés en dizaines de milliers d'euros	0,96	1,69	2,03	2,31	2,55

Pour chaque valeur de $_i 1$, on pose : $y_i = \mathrm{e}^{b_i}$.
On obtient le tableau suivant qu'on ne demande pas de justifier :

2e Tableau

Années	1999	2000	2001	2002	2003
x_i : nombre d'années depuis le nouvel aménagement	1	2	3	4	5
$y_i = \mathrm{e}^{b_i}$	2,6	5,4	7,6	10,1	12,8

1. Dans un repère orthogonal, représenter le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ issus du 2e tableau, où :
   — 2 cm représentent une année sur l'axe des abscisses ;
   — 1 cm représente une unité sur l'axe des ordonnées.
2. Soit G le point moyen des $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ issus du 2e tableau.
   a. Calculer les coordonnées de G, puis placer le point G.
   b. Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par G et par le point A(4,5 ; 11,45).
   Montrer que la droite $\mathscr{D}$ a pour équation :
   $$y = 2,5x + 0,2$$
   et tracer la droite $\mathscr{D}$.
3. Le gérant aimerait prévoir les bénéfices qu'il devrait réaliser pour l'année 2004 ; on considère que $\mathscr{D}$ est une droite d'ajustement affine de ce nuage de points.
   a. à l'aide de l'équation de la droite $\mathscr{D}$, calculer la valeur prévue de y_6 pour l'année 2004.
   Vérifier ensuite graphiquement la valeur trouvée (faire apparaître les traits de construction).
   b. En déduire la valeur du bénéfice b_i prévu pour l'année 2004 arrondi à l'euro près.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans cet exercice, on donnera la valeur exacte de tous les résultats.
Lors de la dernière journée d'un championnat international d'athlétisme, les athlètes sont encouragés par 75 000 spectateurs.
70 % des spectateurs sont français et 30 % sont étrangers.
De plus, 85 % des spectateurs étrangers et 25 % des spectateurs français possèdent une licence d'athlétisme.

1. Recopier et compléter le tableau suivant (aucune justification n'est demandée)

	Licenciés	Non licenciés	Total
Spectateurs français			
Spectateurs étrangers			
Total			75 000

2. On choisit une personne au hasard parmi les spectateurs.
On note les évènements suivants
   - F : « le spectateur est français » ;
   - L : « le spectateur possède une licence d'athlétisme ».

   a. Définir à l'aide d'une phrase les évènements suivants : $\overline{\text{F}}$, $\overline{\text{L}}$, $\text{F} \cap \text{L}$.

   b. Calculer les probabilités des évènements F et L.

   c. Calculer la probabilité de l'évènement $\text{F} \cap \text{L}$.
   En déduire la probabilité de l'évènement $\text{F} \cup \text{L}$.

3. Le prix d'une place au tarif normal est de 70 euros.
Sachant que chaque spectateur licencié obtient une remise de 10 %, calculer la recette obtenue lors de la dernière journée des championnats.

PROBLÈME **11 points**

L'objet de ce problème est l'étude d'une fonction f issue d'un problème économique.
Soit $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.
Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8\ln x + \frac{11}{2}.$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^2 - 6x + 8.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$

$$g(x) = (x-2)(x-4).$$

   Étudier suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$.

2. étude des limites de la fonction f.

   a. étudier la limite de la fonction f en 0. Que peut-on en déduire graphiquement ?

   b. On écrit f sous la forme

$$f(x) = x\left(\frac{1}{2}x - 6\right) + 8\ln x + \frac{11}{2}.$$

   Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. Étude des variations de la fonction f.

   a. Calculer la fonction dérivée de la fonction f et montrer que pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}.$$

b. à l'aide de la **question 1.** étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

5. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente T.

6. Calcul d'une aire.

a. Hachurer la partie $\mathscr{E}$ du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.
Déterminer graphiquement le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1~;4]$.

b. Montrer que la fonction F définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$F(x) = \frac{x^3}{6} - 3x^2 + 8x\ln x - \frac{5}{2}x,$$

est une primitive de la fonction f.

c. Calculer la valeur exacte exprimée en cm^2, de l'aire de la partie $\mathscr{E}$.
Donner une valeur décimale approchée arrondie à 0,01 près de cette aire.