Baccalauréat STT C.G. – I.G. La Réunion juin 2005

Fournir du papier millimétré au candidat.
L'usage des calculatrices et du formulaire officiel est autorisé.

EXERCICE 1 **5 points**

Une entreprise de menuiserie fabrique des étagères. Elle propose trois hauteurs différentes (120 cm, 180 cm, 200 cm), deux largeurs différentes (60 cm, 80 cm), et trois coloris différents (acajou, chêne foncé et pin). Elle peut ainsi, par exemple, fabriquer une étagère de 200 cm de haut, 60 cm de large, coloris chêne foncé.

1. Déterminer le nombre de variétés d'étagères différentes à fabriquer (on pourra utiliser un arbre).
2. Une chaîne de magasins souhaite travailler avec cette entreprise et décide de contrôler la qualité de fabrication en choisissant une étagère au hasard. Le stock contient le même nombre de chaque variété d'étagères.

   Calculer la probabilité des évènements suivants (on donnera les résultats sous forme de fraction irréductible)

   A « l'étagère est coloris acajou » ;

   B « l'étagère mesure moins de 190 cm de haut » ;

   C « l'étagère est coloris pin ou mesure 60 cm de large ».
3. L'étagère contrôlée fait 200 cm de haut. Quelle est la probabilité qu'elle fasse 80 cm de large ?

EXERCICE 2 **6 points**

Un jardinier souhaite aménager un parterre.
Deux jardineries proposent :

- l'une, le lot A constitué de 5 tulipes, 3 muscaris, 2 narcisses pour une somme de 1,90 € ;
- l'autre, le lot B constitué de 6 tulipes, 1 muscari, 3 narcisses pour une somme de 0,90 €.

Le jardinier veut planter entre 165 et 180 tulipes et au moins 60 muscaris.
Le but de cet exercice est de déterminer le nombre x de lots A et le nombre y de lots B que le jardinier doit acheter pour que la dépense soit minimale.

1. Expliquer pourquoi les contraintes auxquelles doivent satisfaire les nombres x et y se traduisent par le système d'inéquations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \\ 5x+6y & \geqslant & 165 \\ 5x+6y & \leqslant & 180 \\ 3x+y & \geqslant & 60 \end{array}\right.$$

2. À tout couple $(x\,;\,y)$ de nombres réels, on associe le point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ dans un repère orthonormal (on choisira 1 cm pour deux unités).

   Déterminer graphiquement l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient le système précédent (on hachurera la zone qui ne convient pas).
3. **a.** Exprimer en fonction de x et de y la dépense D occasionnée par l'achat de x lots A et y lots B.

   b. Tracer dans le repère précédent la droite correspondant à une dépense de 34,20 €.

c. Déterminer graphiquement le nombre de lots à commander dans chaque jardinerie pour que la dépense soit minimale, en précisant la méthode utilisée.

d. Quelle est alors la dépense en euros ?

PROBLÈME **9 points**

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1.$$

1. Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction g.

2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $]-\infty~;~+\infty[$.

3. Calculer $g(0)$ et en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R},~ g(x) \geqslant 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]-\infty~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + x.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. Après avoir vérifié que pour tout réel x on a $f(x) = \mathrm{e}^x(x-2) + x$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = g(x)$.

4. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $]-\infty~;~+\infty[$.

Partie C

On note $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

1. a. Prouver que la droite (D), dont une équation est $y = x$, est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

b. Montrer que la droite (D) coupe la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x = 2$.

2. Construire la droite (D), la courbe $(\mathcal{C})$, et la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

3. Soit $\mathcal{W}$ le domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 3$. On admettra que sur l'intervalle $[2~;~3]$ la courbe $(\mathcal{C})$ est située au-dessus de l'axe des abscisses.

a. Soit F lafonction définie sur $]-\infty~;~+\infty[$ par

$$F(x) = (x-3)\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2.$$

Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la valeur exacte, en cm^2, de l'aire du domaine $\mathcal{W}$. En déduire l'arrondi au centième de cette aire exprimée en cm^2.