Durée : 3 heures

Baccalauréat STT CG - IG Polynésie septembre 2004

EXERCICE 1 **6 points**

Madame Maréchal tient une librairie pour la jeunesse. Une grande partie de sa clientèle lit des romans ou des bandes dessinées (BD). Pour approvisionner son rayon cette libraire a besoin d'au moins 5 romans et 20 BD, mais ne peut dépasser les 180 ouvrages au total.
La place nécessaire, en moyenne, est de 3 cm pour un roman et de 2 cm pour une BD.
Madame Maréchal ne dispose que de 4,80 m de longueur d'étagères pour ces ouvrages.
On note x le nombre de romans et y le nombre de BD en rayonnage.

1. Montrer que les contraintes de l'énoncé peuvent se traduire par le système d'inéquations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & \geqslant & 50 \\ y & \geqslant & 20 \\ x+y & \leqslant & 180 \\ 3x+2y & \leqslant & 480 \end{array}\right.$$

où x et y sont des entiers naturels.

2. À tout couple $(x\ ;\ y)$, on associe le point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Unités graphiques : 1 cm pour 10 unités.

Déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ dont les coordonnées vérifient les contraintes (on hachurera la zone ne convenant pas).

Cet ensemble est l'intérieur d'un quadrilatère. On déterminera précisément par le calcul les coordonnées des sommets de ce quadrilatère.

3. Madame Maréchal réalise un bénéfice de 0,50 € par roman et de 0,40 € par BD. Elle désire connaître le nombre de romans et de BD pour obtenir un bénéfice maximal dans l'hypothèse où elle vend la totalité de ses ouvrages.

a. Exprimer son bénéfice B en fonction de x et de y.

b. Tracer les droites (D_1) et (D_2) correspondant respectivement à un bénéfice B_1, de 100 € et à un bénéfice B_2 de 80 €. Justifier que ces droites sont parallèles.

c. À l'aide du graphique, déterminer alors le nombre de romans et le nombre de BD que Madame Maréchal doit avoir en rayon pour obtenir un bénéfice maximal. Calculer ce bénéfice.

EXERCICE 2 **4 points**

Chez un marchand de journaux 180 revues ont été accidentellement mélangées.
30 % de ces revues sont des mensuels, les autres sont des hebdomadaires.
125 sont des programmes de télévision et 34 % d'entre eux sont des hebdomadaires.
Il y a 11 mensuels consacrés au sport et 9 des hebdomadaires sont des revues d'informatique.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Informatique	Programmes TV	Sport	Total
Mensuels				
Hebdomadaires				
Total				180

Les résultats des probabilités seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

2. On ramasse une revue au hasard. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   a. A : « La revue est mensuelle » ;
   b. B : « La revue n'est pas une revue d'informatique » ;
   c. C : « La revue est consacrée ce sport. »
3. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement L : « La revue est un mensuel consacré au sport ».
   b. En déduire la probabilité de l'évènement A $\cup$ C.

PROBLÈME **10 points**

Partie A : Étude de la fonction f et tracé de la courbe $\mathscr{C}$

On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + 2x - 2.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Unité graphique : 2 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   c. Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :
   $$f(x) = \frac{1}{x}\left(\ln x + 1 + 2x^2 - 2x\right).$$
   En déduire la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. **a.** Soit f' la dérivée de la fonction f. Montrer que $f'(x) = \dfrac{2x^2 - \ln x}{x^2}$.
   b. En admettant que $2x^2 - \ln x$ est strictement positif sur $]0~;~+\infty[$ étudier le signe de $f'(x)$.
   Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   c. Reproduire le tableau suivant et le compléter en donnant les valeurs décimales de $f(x)$ arrondies à 10^{-2} près.

x	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$f(x)$						

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que ses asymptotes.

Partie B : Calcul intégral

On considère la fonction h définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + \ln x.$$

1. Calculer $h'(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.
2. En déduire qu'une primitive F de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ est donnée par

$$F(x) = h(x) + x^2 - 2x.$$

3. **a.** Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x$.

   b. À partir des variations de la fonction f déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[1~;~\text{e}]$.

   c. Interpréter graphiquement $\displaystyle\int_1^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x$.