Baccalauréat STT C.G - G.I. Métropole juin 2004

EXERCICE 1 **5 points**

Une commune désire aménager un nouvel espace vert. Une société de vente lui propose des lots A comprenant dix rosiers, un magnolia et un camélia pour un montant de 200 € ou des lots B comprenant cinq rosiers, un magnolia et trois camélias pour un montant de 300 €. Les besoins sont d'au moins 100 rosiers, 16 magnolias et 30 camélias. On désigne par x le nombre de lots A, et par y le nombre de lots B achetés.
L'annexe 1 présente une solution graphique de ce problème.
Ce graphique sera complété et remis avec la copie.

1. **a.** Quelle est la contrainte concernant les rosiers ?
   Quelle est la droite frontière associée à cette contrainte ?

   b. Quelle est la contrainte concernant les magnolias ?
   Quelle est la droite frontière associée à cette contrainte ?

   c. Quelle est la contrainte concernant les camélias ?
   Quelle est la droite frontière associée à cette contrainte ?

2. Si d désigne la dépense totale en euros pour l'achat des x lots A e-y lots B, montrer que :

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{d}{300}.$$

   Tracer la droite Δ d'équation $y = -\frac{2}{3}x + \frac{d}{300}$ lorsque $d = 5\,400$.

3. Expliquer comment obtenir à l'aide du graphique le couple $(x\,;\,y)$ qui permet de satisfaire les besoins au coût le plus faible possible.
   Quel est ce couple ? Calculer alors la dépense minimale possible.

EXERCICE 2 **5 points**

Une urne contient quatre boules : deux rouges, une verte et une jaune, indiscernables au toucher.
On tire au hasard une boule de cette urne. Après avoir noté la couleur de la boule obtenue, on la replace dans l'urne et on procède à un second tirage.
On note alors à nouveau la couleur obtenue.

1. Dessiner l'arbre correspondant à cette expérience.
2. Soit E l'évènement : « les deux boules tirées sont rouges » et F l'évènement : « une seule des deux boules tirées est rouge ».
   À l'aide de l'arbre, calculer les probabilités $p(\text{E})$ et $p(\text{F})$.
3. Définir par une phrase l'évènement $\text{G} = \text{E} \cup \text{F}$. Calculer $p(\text{G})$.
4. À l'aide de $p(\text{G})$, calculer $p(\text{H})$ où H est l'évènement : « aucune des deux boules tirées n'est rouge ».
5. Les boules de l'urne portent chacune un numéro : les rouges le numéro 1, la verte le numéro 2, la jaune le numéro 4. On s'intéresse maintenant aux numéros obtenus lors des tirages.
   On appelle S la somme des numéros obtenus après le tirage des deux boules.
   Quelle est la probabilité que S soit supérieure ou égale à 4 ? (on pourra faire apparaître les différentes sommes à l'extrémité des branches de l'arbre de la **question 1**).

PROBLÈME **10 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a + (x + b)\mathrm{e}^{-x}.$$

où a et b sont deux réels donnés.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ avec pour unités graphiques 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

1. Calculer $f(x)$, où f' désigne la dérivée de la fonction f.
2. **a.** En annexe 2 est fourni le tracé de la tangente T à$\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   Ce graphique sera remis complété avec la copie.
   Justifier que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 2$.

   b. À l'aide de ces deux égalités, déterminer les réels a et b.

Partie B

On prend pour tout réel x

$$f(x) = 3 + (x - 1)\mathrm{e}^{-x}.$$

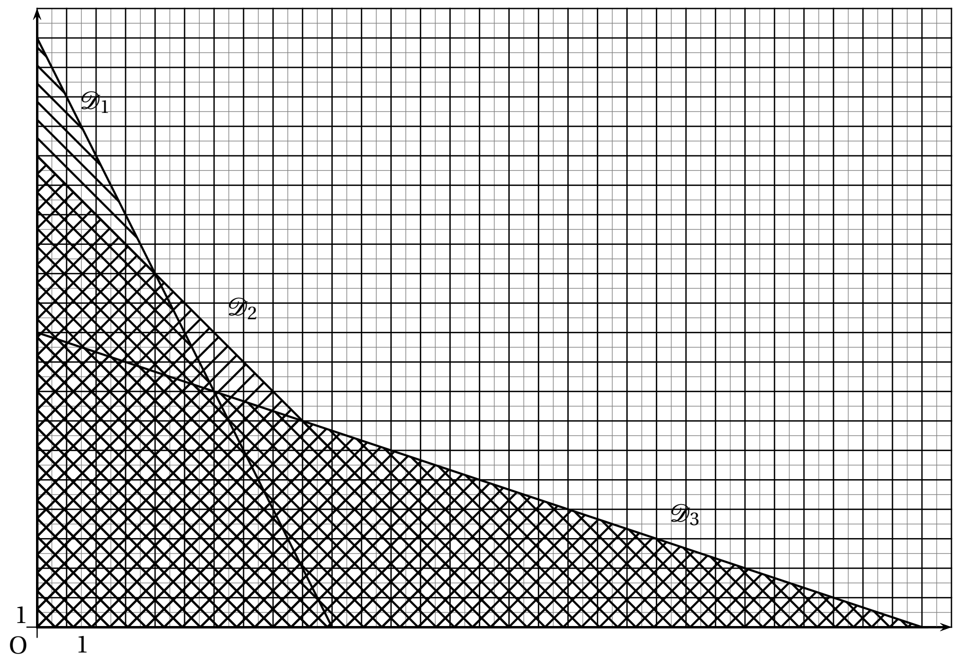
1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Montrer que, pour tout réel x :
   $$f(x) = 3 + \frac{x}{\mathrm{e}^x} - \mathrm{e}^{-x}.$$
   Sachant que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
   En déduire une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
3. **a.** Montrer que, pour tout réel x :
   $$f'(x) = (2 - x)\mathrm{e}^{-x},$$
   où f' désigne la dérivée de la fonction f.
   Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
   Dresser le tableau de variations de f.

   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur le graphique en annexe 2.

Partie C

1. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$F(x) = x\left(3 - \mathrm{e}^{-x}\right),$$
   est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'aire, en cm^2, de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Annexe 1



Annexe 2